1. MAT A1 vizsga. 2015-12-22 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________________ Előadó: ______

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat!

(a) Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, és tegyük fel, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge φ. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ az a vektort, amelynek
hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\varphi$,
iránya $\perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$,
és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot. *(3 pont)*

(b) Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van a (a, b) nyílt intervallumon. $\lim_{x \to a^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$, ha
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\quad \forall x\ \left(c < x < c + \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\right)$ *(2 pont)*

(c) *Bolzano-Darboux-tétel:* Ha f folytonos az $[a, b]$-n, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti d-hez van olyan $c \in [a, b]$, amelyre $f(c) = d$. *(3 pont)*

(d) *Bolzano-Weierstrass-tétel:* Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. *(2 pont)*

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

a) Ha az f függvény invertálható egy I intervallumon, akkor ott szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton csökkenő. *(2 pont)*

Ellenpélda: $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

Javítás: Ha az f függvény folytonos és invertálható egy I intervallumon, akkor ott szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton csökkenő.

b) Minden korlátos sorozat konvergens. *(2 pont)*

Ellenpélda: $(-1)^n$

Javítás: Minden monoton és korlátos sorozat konvergens.
Vagy: Minden konvergens sorozat korlátos.

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Adjuk meg az $\dfrac{x}{2} = 1 - y = z$ egyenessel párhuzamos, az origón és az $(1, 1, 0)$ ponton átmenő sík egyenletét! *(3 pont)*

Ha e az egyenes, $P(1, 1, 0)$ a pont, és S a keresett sík: $\mathbf{v}_e = (2, -1, 1)$, $\vec{OP} = (1, 1, 0) \parallel S$

$$(2, -1, 1) \times (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 3) = \mathbf{n}_S$$

$S:\ -(x-0) + (y-0) + 3(z-0) = 0$, azaz $-x + y + 3z = 0$.

b) Írjuk fel a negyedik komplex egységgyököket! *(1 pont)*

$1,\ i,\ -1,\ -i$

c) Osszuk el maradékosan a $P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 3x + 1$ polinomot $(x - 2)$-vel! *(2 pont)*
hányados: $x^4 + 2x^3 + 3x^3 + 7x + 11$
maradék: 23

Pl. Horner-módszerrel:

	1	0	−1	1	−3	1
2	1	2	3	7	11	23

d) Határozzuk meg az $xe^{1/x}$ függvény ferde aszimptotáját ∞-ben! *(4 pont)*
$f(x) = xe^{1/x}$-nek ferde aszimptotája ∞-ben $y = ax + b$,

ha $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ és $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1 = a, \text{ és}$$

$$\lim_{x\to\infty} xe^{1/x} - x = \lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \overset{L'H(\frac{0}{0})}{=}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = 1 = b,$$

tehát $y = x + 1$ aszimptota.

e) Van-e az $f(x) = x \sin x$ függvénynek lokális szélsőértéke $x = 0$-ban, és ha igen, akkor milyen? *(3 pont)*

1. megoldás: $f'(x) = \sin x + x \cos x \Rightarrow f'(0) = 0$. $f''(x) = 2\cos x - x \sin x \Rightarrow f''(0) = 2 > 0$. Így f-nek 0-ban lokális minimuma van.

2. megoldás: $\sin x$ pozitív $(0, \pi)$-n és negatív $(-\pi, 0)$-n, így $f(x) = x \sin x \geq 0$ a $(-\pi, \pi)$-n, és 0-ban 0, így f-nek lokális minimuma van 0-ban.

f) Végezzünk el az $x = \sin u$ helyettesítést az $\int_0^1 (1 - x^2)^{3/2}\, dx$ integrálban a határok módosításával együtt! (A helyettesítés után adódó integrált nem kell kiszámolni, csak az integrálandó függvényt egyszerűsíteni!) *(3 pont)*

$$x = \sin u,\quad dx = \cos u\, du \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (1 - x^2)^{3/2}\, dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 u)^{3/2} \cos u\, du = \int_0^{\pi/2} |\cos u|^3 \cos u\, du =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 u\, du.$$

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Rajzoljuk be, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra melyik tulajdonságból melyik következik! *(3 pont)*

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \text{ lineárisan összefüggőek}} & \\ \nearrow & & \searrow\nwarrow \\ \boxed{\underline{a} \times \underline{b} = 0} & \longrightarrow & \boxed{\underline{a}\underline{b}\underline{c} = 0} \end{array}$$

b) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! *(4 pont)*

	értelmezési tartomány	értékkészlet
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\ln x}$	$[1, +\infty)$	$[0, +\infty)$

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx =$ *(5 pont)*

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x}(\ln x)^{-2}\, dx =$$
$$\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

b) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(2x)\, dx =$ *(5 pont)*

$$= \int 1 \cdot \operatorname{arctg}(2x)\, dx =$$
$$x \operatorname{arctg}(2x) - \int x \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2\, dx =$$
$$x \operatorname{arctg}(2x) - \tfrac{1}{4} \cdot \textstyle\int \frac{8x}{1+4x^2}\, dx =$$
$$x \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C$$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^2+2}{\sqrt{x}}\, dx =$ *(3 pont)*

Az integrál improprius, mert az integrálandó függvény 0^+-ban ∞-hez tart.

$$\int_0^1 5x^{3/2} + 2x^{-1/2}\, dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 5x^{3/2} + 2x^{-1/2}\, dx =$$
$$\lim_{a\to 0+} \left[5 \cdot \tfrac{2}{5} x^{5/2} + 2 \cdot 2x^{1/2}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0+} 6 - 2a^{5/2} - 4a^{1/2} = 6.$$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx =$ *(3 pont)*

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\cos\sqrt{x}\, dx = 2\sin\sqrt{x} + C$$

6.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$! *(2 pont)*

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, és $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Ebből

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4} - \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $f' \geq 0$, akkor f monoton növő! (Mondjuk ki pontosan az állítást!) *(5 pont)*

Ha f differenciálható egy I intervallumon, és ott $f' \geq 0$, akkor f monoton növő az I-n.

Bizonyítás:

Legyen $a, b \in I$, és $a < b$. A Lagrange-középértéktétel szerint van olyan $c \in (a, b) \subseteq I$, amelyre $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. A feltétel szerint $f'(c) \geq 0$. Mivel $b - a > 0$, ebből $f(b) - f(a) \geq 0$, azaz $f(a) \leq f(b)$ következik.