2. MAT A1 vizsga. 2016-01-05 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________________ Előadó: ______

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat! *(11 pont)*

(a) c ugráshelye f-nek, ha a $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ határértékek léteznek és végesek, de különbözők.

(b) *Cauchy-féle középértéktétel:* Ha f és g folytonosak $[a,b]$-n és diffhatóak (a,b)-n, továbbá g'-nek nincs zérushelye (a,b)-n, akkor van olyan $c\in(a,b)$, hogy $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

(c) *Newton–Leibniz-tétel*: Ha f és F folytonosak $[a,b]$-n, és $f(x)=F'(x)$ minden $x\in(a,b)$-re, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a).$$

(d) Egy $[a_n]$ sorozat határértéke A, ha

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\ (n\ge n_0 \Rightarrow |a_n-A|<\varepsilon).$$

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

a) Ha az f valós függvény kétszer differenciálható (a,b)-n, és $c\in(a,b)$-ben $f''(c)=0$, akkor c-ben f-nek inflexiós pontja van. *(2 pont)*
Pl. $f(x)=x^4$ esetében $f'(x)=4x^3$ és $f''(x)=12x^2$, így $f''(0)=0$, de mivel $f''(x)\ge 0$, így f mindenhol konvex, ezért sehol sincs inflexiós pontja.
Helyesen$_1$: Ha az f valós függvény kétszer differenciálható (a,b)-n, és $c\in(a,b)$-ben f'' előjelet váltóan 0, akkor c-ben f-nek inflexiós pontja van.
Helyesen$_2$: Ha az f valós függvény kétszer differenciálható (a,b)-n, és $c\in(a,b)$-ben inflexiós pontja van, akkor $f''(c)=0$.

b) Minden legalább elsőfokú valós polinom felbontható elsőfokú valós polinomok szorzatára. *(2 pont)*
Pl. x^2+1 nem bontható fel elsőfokúak szorzatára, hiszen nincs valós gyöke.
Helyesen$_1$: Minden legalább elsőfokú valós polinom felbontható elsőfokú és másodfokú valós polinomok szorzatára.
Helyesen$_2$: Minden legalább elsőfokú komplex polinom felbontható elsőfokú komplex polinomok szorzatára.

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Írjuk fel az $\dfrac{5+i}{2+3i}$ komplex számot algebrai és trigonometrikus alakban! *(2 pont)*
$\dfrac{5+i}{2+3i} = \dfrac{5+i}{2+3i}\cdot\dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{13-13i}{2^2+3^2} = 1-i$
Trigonometrikus alakban: $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$

b) Mi a $(3,-4,2)$ vektor vetületvektora a $(2,-1,1)$ vektorra? *(2 pont)*
$\dfrac{(3,-4,2)(2,-1,1)}{(2,-1,1)(2,-1,1)}\cdot(2,-1,1) = \dfrac{12}{6}(2,-1,1) = (4,-2,2)$

c) Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ függvény limeszét 0-ban és ∞-ben! *(4 pont)*
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} \overset{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x} \overset{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}$
∞-ben: mivel $-1\le\cos x\le 1$, így $0\le\dfrac{1-\cos x}{x^2}\le\dfrac{2}{x^2}$,
így a rendőrelv alapján $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = 0$.

d) Hol monoton növő és hol monoton fogyó az $x^2\ln x$ függvény? *(3 pont)*
A függvény értelmezési tartománya $(0,\infty)$.
$f'(x) = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln x+1) = 0 \Longrightarrow x=0$ (nincs az értelmezési tartományban) vagy $2\ln x+1=0$
$\Leftrightarrow \ln x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$
$x\in(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}) \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f$ monoton csökkenő
$x\in(\frac{1}{\sqrt{e}},\infty) \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f$ monoton növekedő

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Rajzoljuk be, hogy az $[a,b]$-n értelmezett f függvényre melyik tulajdonságból melyik következik! *(3 pont)*

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{differenciálható}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\boxed{\text{integrálható}} & & \boxed{\text{folytonos}} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

b) Adjuk meg az $\displaystyle\int_{-1/2}^{2}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ integrál $P=\{-\frac{1}{2},0,1,2\}$ felosztáshoz és $\mathbf{c}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)$ reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összegét! *(2 pont)*
$\dfrac{1}{-\frac{1}{2}+1}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot 1 + \dfrac{1}{2+1}\cdot 1 = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = 2$

c) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! *(4 pont)*

	értelmezési tartomány	értékkészlet
$\operatorname{cth} x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
$\cos(\arccos x)$	$[-1,1]$	$[-1,1]$

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$ *(4 pont)*
$\dfrac{x}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow$
$\begin{matrix}A+B=1\\2A+B=0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}A=-1\\B=2\end{matrix}\quad \displaystyle\int\frac{x}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\int -\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + c$

b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$ *(5 pont)*

$= \displaystyle\lim_{b\to\infty}\int\limits_2^b \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\cdot 2\right]_2^b =$

$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{b}{2}-\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

c) $\displaystyle\int x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$ *(4 pont)*

$= \displaystyle -\frac{1}{2}x\cos(2x)-\int -\frac{1}{2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x\cos(2x)+$

$\displaystyle\frac{1}{4}\sin(2x)+c$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ *(3 pont)*

1. mo: $\displaystyle = \int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}x\cdot(\operatorname{tg}x)'\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}1^2-0=\frac{1}{2}$

2. mo: $\displaystyle = \int_0^{\pi/4} -(-\sin x)\cdot\cos^{-3}x\,\mathrm{d}x =$

$\displaystyle\left[-\frac{\cos^{-2}x}{-2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}}{2}-\frac{1^2}{2}=\frac{1}{2}$

6.

a) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a skaláris szorzat koordinátás alakjára vonatkozó tételt 2 dimenzióban! *(3 pont)*
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=a_1b_1+a_2b_2$
Biz.: $(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j})\cdot(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j})=a_1b_1\mathbf{ii}+a_1b_2\mathbf{ij}+a_2b_1\mathbf{ji}+a_2b_2\mathbf{jj}=a_1b_1\cdot1+a_1b_2\cdot0+a_2b_1\cdot0+a_2b_2\cdot1=a_1b_1+a_2b_2$

b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Rolle-tételt! *(6 pont)*
Ha f folytonos az $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n és $f(a)=f(b)$, akkor $\exists c\in(a,b)$, hogy $f'(c)=0$.
Biz.: A Weierstrass-tétel értelmében, mivel f folytonos $[a,b]$-n, azért felveszi valahol a maximumát és a minimumát. Ha ezek közül valamelyiket (a,b)-n veszi fel, akkor ez lokális szélsőértékhely is, és mivel itt f differenciálható, azért f' itt 0. Ha mindkét extrémum a végpontokban van, akkor mivel $f(a)=f(b)$, azért f ilyenkor konstans $[a,b]$-n, és így mindenütt 0 a deriváltja.