

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat! (10 pont)

(a) Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely **a** és **b** vektorra

.....

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

.....

(b) Bolzano-tétel:

Ha f az $[a, b]$ zárt intervallumon,

és $f(a)$ és $f(b)$,

akkor \exists , hogy

(c) l'Hospital-szabály: Legyen f és g két olyan valós függvény, melyek

- egy I nyílt intervallumon (kivéve esetleg egy a pontot)
- ha $a \neq x \in I$, akkor $g'(x)$,
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ mindegyike, vagy mindegyik
- és létezik az $L =$ határérték.

Ekkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

a) Legyen f egy valós függvény, mely folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor ha f szigorúan monoton, akkor $f' > 0$ az (a, b) intervallumon. (2 pont)

b) Hol folytonos az $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$ függvény, és ahol nem, ott milyen szakadása van? (3 pont)

c) Milyen elemi törtfüggvények összegére lehet felbontani az $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$ racionális törtfüggvényt? (A felbontást elég paraméteresen felírni, nem kell kiszámolni.) (2 pont)

d) Adjuk meg annak az egyenesnek egy paramétermentes egyenletrendszerét, amely átmege az origón és merőleges az $x + 2y - z = 3$ síkra! (2 pont)

e) Mely pontokban vízszintes az $f(x) = \frac{x^3}{\ln x^2}$ függvény érintője? (3 pont)

b) Minden sorozatnak van konvergens részsorozata. (2 pont)

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Adjuk meg algebrai alakban azt a komplex számot, amellyel való szorzás az origó körüli a -60° -os forgatást valósítja meg a komplex számsíkon! (2 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Ha az f függvény inverze g , és $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$, akkor mivel egyenlő $g'(1)$? (2 pont)

- b) Rajzoljuk be, hogy az f valós függvény esetében melyik tulajdonságból melyik következik! (3 pont) d) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$ (4 pont)

f szigorúan monoton

f invertálható

f monoton

- c) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! (4 pont)

	értelmezési tartomány	értékkészlet
e^{1/x^2}		
$\operatorname{arth} x$		

6.

- a) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin \varphi = 0$! (3 pont)

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int x \ln x \, dx$ (4 pont)

- b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be az integrálközéptértéktételt! (6 pont)

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} \, dx$ (3 pont)

c) $\int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$ (5 pont)