3. MAT A1 vizsga. 2016-01-12 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________ Előadó: ______

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat! *(10 pont)*

(a) Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely **a** és **b** vektorra

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha **a** és **b** párhuzamosak és egyirányúak.

(b) Bolzano-tétel:

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon,

és $f(a)$ és $f(b)$ ellenkező előjelűek (azaz $f(a)f(b) < 0$),

akkor $\exists$ $c \in (a, b)$, hogy $f(c) = 0$.

(c) l'Hospital-szabály: Legyen f és g két olyan valós függvény, melyek

- differenciálhatók egy I nyílt intervallumon (kivéve esetleg egy a pontot)
- ha $a \ne x \in I$, akkor $g'(x) \ne 0$,
- $\lim_{x\to a} f(x)$ és $\lim_{x\to a} g(x)$ mindegyike 0, vagy mindegyik $\pm\infty$
- és létezik az $L = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték.

Ekkor $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

a) Legyen f egy valós függvény, mely folytonos $[a, b]$-n és differenciálható (a, b)-n. Ekkor ha f szigorúan monoton, akkor $f' > 0$ az (a, b) intervallumon. *(2 pont)*

Ellenpélda: $f(x) = x^3$ szigorúan monoton növő az egész $\mathbb{R}$-en, de $f'(0) = 0$. (Tehát az állítás még akkor sem igaz, ha "szig. monoton" helyett "szig. monoton növő"-t írunk.)

Helyesen: ...Ha $f' > 0$ (a, b)-n, akkor f szig. mon. növő $[a, b]$-n.

Vagy: ...Ha f monoton növő (a, b)-n, akkor $f' \ge 0$ (a, b)-n.

b) Minden sorozatnak van konvergens részsorozata. *(2 pont)*

Ellenpélda: $a_n = n$ limesze ∞, tehát minden részsorozata is ∞-hez tart, így nem konvergens.

Helyesen: Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Vagy: Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Adjuk meg algebrai alakban azt a komplex számot, amellyel való szorzás az origó körüli a $-60°$-os forgatást valósítja meg a komplex számsíkon! *(2 pont)*

$$\cos(-60°) + i\sin(-60°) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

b) Hol folytonos az $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$ függvény, és ahol nem, ott milyen szakadása van? *(3 pont)*

f folytonos ott, ahol $\sin x \ne 0$, azaz $x \ne k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, mert két folytonos függvény hányadosa, ahol a nevező nem 0.

$x_0 = 0$-ban $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} \cdot x^2 = 1 \cdot 0 = 0$, tehát itt megszüntethető szakadás van (hézagpont).

$x_0 = k\pi$-ben $(k \ne 0)$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, illetve $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, ezért itt pólus van.

c) Milyen elemi törtfüggvények összegére lehet felbontani az $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$ racionális törtfüggvényt? (A felbontást elég paraméteresen felírni, nem kell kiszámolni.) *(2 pont)*

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

d) Adjuk meg annak az egyenesnek egy paramétermentes egyenletrendszerét, amely átmegy az origón és merőleges az $x + 2y - z = 3$ síkra! *(2 pont)*

A sík normálvektora $(1, 2, -1)$ megegyezik az egyenes irányvektorával. A paramétermentes egyenletrendszer:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{-1}, \text{ azaz } x = \frac{y}{2} = -z.$$

e) Mely pontokban vízszintes az $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln x^2}$ függvény érintője? *(3 pont)*

Ott vízszintes az érintő, ahol a derivált 0.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x^2 - x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{\ln^2 x^2} = \frac{x^2(3\ln x^2 - 2)}{\ln^2 x^2}.$$

$x = 0$-ban f nincs értelmezve, így a megoldás csak $\ln x^2 = \frac{2}{3} \iff x^2 = e^{2/3} \iff x = \pm e^{1/3} = \pm\sqrt[3]{e}$

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Ha az f függvény inverze g, és $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$, akkor mivel egyenlő $g'(1)$? *(2 pont)*

$f(2) = 1 \Rightarrow g(1) = 2$, és

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3}.$$

b) Rajzoljuk be, hogy az f valós függvény esetében melyik tulajdonságból melyik következik! *(3 pont)*

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{f \text{ szigorúan monoton}} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \boxed{f \text{ invertálható}} & & \boxed{f \text{ monoton}} \end{array}$$

c) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! *(4 pont)*

	értelmezési tartomány	értékkészlet
e^{1/x^2}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(1, \infty)$
$\operatorname{arth} x$	$(-1, 1)$	$\mathbb{R}$

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$ *(4 pont)*

Parciális integrálással:

$$\int x \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \,\mathrm{d}x$ *(3 pont)*

$(x^3+1)' = 3x^2$, így a fordított láncszabályból

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}(x^3+1)^{-1/2} \cdot (3x^2) \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}(x^3+1)^{1/2} \cdot 2 + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$$

c) $\int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \,\mathrm{d}x$ *(5 pont)*

Improprius integrál, mert $\frac{1}{2}$-ben a nevező 0.

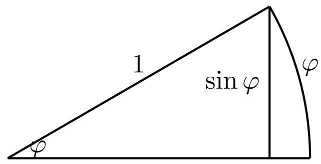
$$\int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \,\mathrm{d}x = \lim_{b \to (1/2)^-} \int_0^b \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{b \to (1/2)^-} \left[2\arcsin(2x) \cdot \frac{1}{2} \right]_0^b =$$
$$= \lim_{b \to (1/2)^-} \arcsin(2b) - \arcsin 0 = \arcsin 1 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

d) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ *(4 pont)*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}$$

6.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{\varphi \to 0} \sin\varphi = 0$! *(3 pont)*



Az ábra alapján $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$-re $0 \le \sin\varphi \le \varphi$. Mivel $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, ebből

$0 \le |\sin\varphi| \le |\varphi|$, ha $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\lim_{\varphi \to 0} |\varphi| = 0 \Rightarrow$ A rendőrelv miatt $\lim_{\varphi \to 0} |\sin\varphi| = 0$.

$\Rightarrow \lim_{\varphi \to 0} \sin\varphi = 0$.

b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be az integrál-középértéktételt! *(6 pont)*

Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor van olyan $c \in [a,b]$, hogy

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás: Weierstrass-tétel $\Rightarrow$ f felveszi a minimumát (m) és maximumát (M) $[a,b]$-n.

$$m \le f(x) \le M \;\Rightarrow\; m(b-a) \le \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$
$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \le M$$

$\exists c_1, c_2 \in [a,b]:\; f(c_1) = m$, és $f(c_2) = M$.

Bolzano–Darboux-tétel $\Rightarrow$ $\exists c$ a c_1 és c_2 között (így $[a,b]$-ben), hogy

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$