

Vizsgatematika - Matematika A1a KJK

► = kötelező bizonyítás

Minden tételnél fontosak az előadáson elhangzott példák/ellenpéldák!

- Bevezetés:** • logikai műveletek és műveletábrák, azonosságok ► az előadáson elhangzott kétváltozós logikai azonosságok bizonyítása igazságtáblával (implikáció ekvivalens alakja, implikáció tagadása, kontrapozíció, de Morgan azonosságok) • szükségesség és elégségesség fogalma • univerzális és egzisztenciális kvantor • halmazműveletek és tulajdonságaik, azonosságok • halmazok számossága, végtelen számhalmazok
- Vektorok:** • vektorok összeadása, skalárral szorzása és ezek műveleti tulajdonságai • lineáris kombináció fogalma, a sík, illetve tér vektorainak előállítása lineáris kombinációként • skaláris szorzás és tulajdonságai, hosszúság, szög, háromszögegyenlőtlenség • vektor felbontása merőleges összetevőkre • vektoriális szorzás és tulajdonságai • vegyesszorzat és tulajdonságai, paralelepipedon térfogata • vektorműveletek (összeadás, skalárral szorzás, skaláris szorzás, vektoriális szorzás) koordinátás alakban ► skaláris szorzat koordinátás alakja két dimenzióban • az n dimenziós tér, lineáris függetlenség fogalma és ekvivalens alakja • skaláris szorzás, távolság, szög az n dimenziós térben, Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség
- Analitikus térgeometria:** • egyenes és sík paraméteres és paramétermentes egyenlete • térelemek kölcsönös helyzete, két egyenes, sík és egyenes valamint két sík metszetének meghatározása • térelemek távolsága, pont és egyenes, pont és sík valamint nem párhuzamos egyenesek távolsága
- Komplex számok:** • komplex szám algebrai alakja, műveletek algebrai alakban • komplex szám konjugáltjának és abszolút értékének tulajdonságai • komplex szám trigonometrikus alakja, műveletek trigonometrikus alakban, hatványozás, gyökvonás, komplex egységgyökök • algebra alaptétele
- Függvények határértéke:** • függvény fogalma, függvény grafikonja • véges határérték a végtelenben és véges pontban • végtelen határérték a végtelenben és véges pontban • határértékek és algebrai műveletek, kibővített aritmetika • rendőrelv ► $\sin x$ határértéke a 0-ban • jobb- és baloldali határérték fogalma • \sin / x határértéke a 0-ban • aszimptoták (vízszintes, függőleges, ferde)
- Folytonosság:** • pontbeli folytonosság fogalma, műveletek folytonos függvényekkel ► folytonos függvények kompozíciója folytonos • szakadási helyek osztályozása • egyoldali folytonosság fogalma és kapcsolata a pontbeli folytonossággal ► Bolzano-tétel • Bolzano-Darboux-tétel, Weierstrass-tétel
- Elemi függvények és inverzeik:** • trigonometrikus függvények tulajdonságai • polinomok tulajdonságai, polinomok maradékos osztása, gyöktényezők, Horner-módszer ► racionális gyökteszt • exponenciális és hiperbolikus függvények tulajdonságai ► $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ • invertálhatóság és inverz függvény fogalma • invertálhatóság és monotonitás kapcsolata • inverz függvény tulajdonságai • elemi függvények inverze: gyökfüggvények, arkusz függvények, area függvények, logaritmus függvények és tulajdonságaik
- Differenciálhatóság** • differenciálhatóság fogalma, deriváltfüggvény, érintő egyenlete ► folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata ► $\sin x$ függvény deriváltja • differenciálási szabályok ► szorzatfüggvény deriváltja • láncszabály • inverz függvény deriváltja ► $\arcsin x$ függvény deriváltja • Darboux-tétel • elemi függvények és inverzeik deriváltja
- A derivált alkalmazásai:** • lokális és abszolút szélsőérték fogalma, kritikus pontok ► lokális szélsőérték szükséges feltétele ► Rolle-tétel • Lagrange-tétel, Cauchy-tétel • l'Hospital-szabály • logaritmus, hatvány és exponenciális függvények nagyságrendje
- Függvényvizsgálat:** • első derivált és monotonitás kapcsolata ► ha $f' \geq 0$, akkor f monoton növekvő • első derivált és lokális szélsőértékek kapcsolata • második derivált és konvexitás kapcsolata • második derivált és inflexiók pontok kapcsolata • második derivált és lokális szélsőértékek kapcsolata
- Határozatlan integrál:** • primitív függvény és határozatlan integrál • alapintegrálok • általános integrálási szabályok, fordított láncszabály és speciális esetei, helyettesítéssel integrálás, parciális integrálás
- Határozott integrál:** • felosztás, felosztás finomsága, reprezentáns rendszer, integrálközelítő összeg, integrálhatóság • véges sok pont kivételével folytonos függvény integrálhatósága, véges sok pontban megváltoztatott függvény integrálja • határozott integrál műveleti tulajdonságai • integrálegyenlőtlenségek ► integrál-középtétel • integrálfüggvény fogalma és tulajdonságai • Newton-Leibniz-tétel • helyettesítéssel integrálás határozott integrálra
- Integrálási technikák:** • racionális törtfüggvény integrálása - polinom + valódi törtfüggvény alakra hozás, nevező faktorizálása ► valódi polinom felbontása első és másodfokú tényezőkre szorzatára, parciális törtekre bontás, elemi törtfüggvények integrálása • fordított helyettesítés határozott és határozatlan integrál esetén, speciális helyettesítések: $R(e^x)$, $R(\sqrt[n]{x})$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$
- Improprius integrál és a határozott integrál alkalmazásai:** • improprius integrál fogalma: integrálás végtelen intervallumon és függőleges aszimptotájú függvény integrálása ► az $1/x^p$ függvény integrálja az $[1, \infty)$ és $(0, 1]$ intervallumokon • összehasonlító (minoráns és majoráns) konvergenciakritériumok, általános majoráns kritérium • területszámítás, függvény grafikonjának ívhossza, forgástest térfogata és felszíne
- Sorozatok:** • sorozat fogalma, sorozat jellemzői • sorozat határértéke és a definíció ekvivalens alakja • Átviteli elv • Konvergencia és korlátosság kapcsolata, monoton korlátos sorozatok • részsorozat fogalma, részsorozat határértéke ► minden sorozatnak van monoton részsorozata • Bolzano-Weierstrass-tétel • Cauchy-féle konvergenciakritérium