A szumma jelölés, teljes indukció

1. Értelmezzük az a), b) rész szummáit, illetve írjuk szumma alakban a c), d) részben szereplő összegeket! Jól vannak-e definiálva az utóbbiak?

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k-1$

b) $\sum_{n=0}^{5} 3$

c) $-1+4-9+16-25+\ldots+10000$

d) $1+4+\ldots+49$

2. Bizonyítsuk be a következő összegképleteket!

a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (használhatjuk az előző eredményeket)

d) (Hf) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

e) Általánosítsuk a b) képletet!

f) Határozzuk meg az 1.a)-ban szereplő összeg értékét!

3. Vegyünk fel egy síkon n darab általános helyzetű egyenest! Mutassuk meg, hogy az így kapott „térkép” kiszínezhető két színnel úgy, hogy a közös oldallal rendelkező részek különböző színűek legyenek!

4. Bizonyítsuk be a Bernoulli-egyenlőtlenséget: $x > -1$-re és n nemnegatív egész számra $(1+x)^n \geq 1+nx$.

5. (Hf) Bizonyítsuk be, hogy $\frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1}$ igaz $n \geq 1$-re.

6*. (Hf) Bizonyítsuk be a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget: $\frac{x_1+\ldots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$, ahol $x_i \geq 0$ minden i-re. (Útmutatás: Lássuk be k-ra vonatkozó indukcióval, hogy $n=2^k$ alakú számokra igaz, aztán azt, hogy ha igaz $n+1$-re, akkor n-re is.)

Halmazok megadása, halmazműveletek

7. Írjuk föl az $[1,8)$ intervallumot és a $(-\infty,5)$ intervallumot halmaz jelöléssel.

8. A következő halmazokat írjuk föl az $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ számhalmazok és intervallumok fölhasználásával, halmazműveletek segítségével.

$A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-x}{x-1} \geq 0 \,\}$ $\qquad$ $B = \{[x] \mid x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{x+1}} \text{ értelmezve van}\,\}$

9. (Hf) Legyen T a téglalapok, R a rombuszok, D pedig azoknak a négyszögeknek a halmaza, amelyeknek van derékszögük.

a) Fejezzük ki az $N = \{\,\text{négyzetek}\,\}$ halmazt a fönti halmazokkal!

b) Írjunk föl egy igaz egyenlőséget a T, R, D halmazok segítségével!

c) A T, D, R halmazokat együtt ábrázoló Venn-diagramon satírozzuk be az üres részeket, a többibe pedig rajzoljunk odaillő négyszöget!

10. Bizonyítsuk be az $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$ azonosságot!

11. (Hf) Bizonyítsuk be, hogy $K \setminus (L \setminus M) = (K \setminus L) \cup (K \cap M)$.

12. (Hf) Keressük meg az összes olyan X halmazt egy adott A halmazhoz, amelyre $A \setminus X = X \setminus A$.