1. Hány megoldása lehet az alábbi lineáris egyenletrendszereknek a valós számok körében, ha a $*$-ok tetszőleges (nem feltétlenül egyenlő) számokat jelölnek?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & * & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixokhoz tartozó egyenletrendszereknek?

a) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 3 & -2 & a & b \\ -3 & -6 & a-b & 2b \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & a & 1 \end{array}\right]$

3. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi részhalmazok? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát is!

a) $\{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1 \,\}$
b) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\,\}$
c) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\,\}$
d) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\,\}$
e) $\{(x, y, z) \mid x^3 + y^3 + z^3 = 0\,\}$

4. Tegyük fel, hogy $\{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \,\}$ bázisa egy V valós vektortérnek. Döntsük el, hogy az alábbiak független rendszert, generátorrendszert, bázist alkotnak-e V-ben!

a) $\{\, \mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3 \,\}$ b) $\{\, \mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_1-\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2+2\mathbf{b}_3 \,\}$ c) $\{\, \mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_2+\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_3+\mathbf{b}_1 \,\}$

5. Vegyük $\mathbb{R}^3$-ben a $\mathcal{B} = \{(1, 3, -1), (0, 1, 1), (2, -1, 0)\,\}$ bázist. Melyik az a $\mathbf{v}$ vektor, amelynek $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektora $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, és mi a $\mathbf{w} = (3, 0, -3)$ vektor koordinátavektora $\mathcal{B}$ szerint?

6. Adjuk meg az alábbi mátrixok sorterének és oszlopterének egy-egy bázisát! Írjuk fel a többi sor-, illetve oszlopvektort ezek lineáris kombinációjaként!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

7. Lineárisak-e a következő, $\mathbb{R}^3$-ön ható leképezések? Melyik vektortérbe képeznek?

a) $(1, 1, 1)$-gyel való skalárszorzás
b) a középső koordináta elhagyása
c) az $x - 2y + z = 5$ síkra való tükrözés
d) $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - ((1, -1, 0) \times \mathbf{v})$
e) $\mathbf{v} \mapsto |\mathbf{v}|$

8. Tekintsük a legföljebb harmadfokú valós polinomok $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ terén a $p(x) \mapsto xp'(x)$ leképezést. Bizonyítsuk be, hogy ez lineáris transzformáció! Hány dimenziós a magtere és a képtere?