1. Legyen

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}, B=[\,1\quad 2\quad 1\,], C=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-1&2\\2&3\\3&4\end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixműveletek közül végezzük el azokat, amelyek értelmezve vannak!

$$A+A,\quad A+B,\quad AB,\quad AC,\quad AC+2C,\quad AD-3D,\quad D^2,\quad CC^T,\quad BC,\quad CB.$$

2. Igazak-e minden $n\times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?

a) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$;
b) $(A+I_n)(A-I_n)=A^2-I_n^2$;
c) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;
d) $(AB)^T=A^TB^T$.

3. Egy mátrixot szimmetrikusnak nevezünk, ha $A^T=A$. Az 1. feladat mátrixai között van-e szimmetrikus? Bizonyítsuk be, hogy AA^T mindig szimmetrikus mátrix!

4. Legyen $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\end{bmatrix}$.

a) Mik az XA oszlopai, ha X oszlopai $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$?
b) Mik az AY sorai, ha Y sorai $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$?

5. Határozzuk meg a következő mátrixok rangját! (A mátrix rangja az oszlopterének és egyúttal a sorterének a dimenziója, ami megegyezik a lépcsős alakjában a nem nulla sorok számával.)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&2i&1+2i\\3&i&3-i\\4i&-3&-1+4i\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&3&-2&-1\\-2&-6&4&2\\-1&-3&2&1\end{bmatrix}$$

6. Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban, illetve az a) és h) részben szereplő lineáris transzformációk esetén a megadott $\mathcal{B}$ bázisban is. $\mathbb{R}^n$ standard bázisa $\{\,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\,\}=\{(1,0,\dots,0),\ (0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\,\}$, a $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ vektortér standard bázisa $\{\,1,i\,\}$, a 2×2-es valós mátrixok terének, $\mathbb{R}^{2\times 2}$-nek a standard bázisa pedig $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$.

a) az $y=x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B}=\{(1,0),(1,1)\,\}$;
b) az $\mathbf{i}=(1,0,0)$ vektorral balról való vektoriális szorzás;
c) az $(1,-1,2)$ vektorral balról való vektoriális szorzás;
d) $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x,y,z))=(x+y,x+y)$;
e) a 2×2-es valós mátrixokon a transzponálás;
f) egy adott $a+bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;
g) a sík α szögű elforgatása az origó körül.
h) Az $x-2y+z=0$ síkra való merőleges vetítés standard bázisban, $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(2,1,0),(1,-2,1)\,\}$

7. Írjuk fel az $f:(x,y,z)\longmapsto(x+y-2z,x+z,2x+y-z,-x-z)$ leképezés mátrixát! Állapítsuk meg a mátrix rangját! Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!