1. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2. Használjunk elemi sor- vagy oszlopműveleteket a determinánsok egyszerűsítéséhez, és így számítsuk ki a determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. Számítsuk ki a következő $n \times n$-es mátrixok determinánsát!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

4. Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?

5. Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Szimultán egyenletrendszerként oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket!

a) $AX = B$
b) $BX = A$
c) $XA = B$ (azaz $A^T X^T = B^T$)

6. Számítsuk ki az alábbi mátrixok közül az invertálhatók inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

7. Számítsuk ki a mátrixok inverzét az aldeterminánsaik segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

8. A Cramer-szabály felhasználásával határozzuk meg y értékét az alábbi egyenletrendszerek megoldásában!

a) $\begin{aligned} x \phantom{{}+y} + 2z &= -2 \\ 3x + y + z &= 3 \\ -x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x - y + z &= 2 \\ x + y - 2z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= 9 \end{aligned}$