1. Adjuk meg annak a T lineáris transzformációnak a standard mátrixát, amelyre

a) $f : (1,0) \mapsto (3,1),\ \ (1,1) \mapsto (-1,2)$.

b) $f : (1,1,0) \mapsto (0,1,4),\ \ (1,0,1) \mapsto (1,2,4),\ \ (0,1,1) \mapsto (-1,3,2)$.

2. Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisban!

a) $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1,2,0),(1,1,-1),(1,0,-1)\}$, $[f]_{\mathcal{B}} = ?$

b) $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, ahol $\mathcal{B}$ az a) részben szereplő bázis. $[f]_{\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}} = ?$

c) Az origó körüli $90°$-os forgatás a $\{(3,5),(2,3)\}$ bázisban

d) $f : (1,2) \mapsto (2,4),\ \ (-1,3) \mapsto (1,-3)$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(-1,3)\}$. $[f]_{\mathcal{B}} = ?$, $f_{\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}} = ?$

e) Az $(1,1,0)$ vektorral balról való vektoriális szorzás az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában, és az $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$ és $(1,1,0) \times (1,-1,0)$ vektorokból álló bázisban.

3. Adjuk meg (számolás nélkül) a következő lineáris transzformációk sajátvektorait, sajátértékeit, magterét és képterét:

a) az $x - y - 2z = 0$ síkra való tükrözés $\mathbb{R}^3$-ben;

b) az x tengelyre való $(1,1)$ irányú vetítés $\mathbb{R}^2$-ben;

c) $\mathbf{r} \mapsto (1,2,3) \times \mathbf{r}$ az $\mathbb{R}^3$-ben.

4. Írjuk fel a következő mátrixok karakterisztikus polinomját, majd számítsuk ki a sajátértékeiket és sajátvektoraikat! Melyek diagonalizálhatók $\mathbb{R}$ fölött? És $\mathbb{C}$ fölött?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Van-e a síkban olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvektora? És a térben? Melyek azok a lineáris transzformációk, amelyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora?

6. Diagonalizálás segítségével számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix n-edik hatványát!

7. Legyen $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\} \le \mathbb{R}^3$. Adjunk meg V-ben egy ortogonális bázist, és egészítsük ki ezt $\mathbb{R}^3$ egy ortogonális bázisává! Adjunk meg ugyanilyen tulajdonságú ortonormált bázisokat is V-ben és $\mathbb{R}^3$-ben!

8. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát: $(1,5,3)$ és $(3,0,-1)$. Határozzuk meg A összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt!