

1. Számítsuk ki az alábbi kettős- és hármasintegrálokat! Ábrázoljuk az integrálás tartományát! (Hf: b), c))

$$\text{a) } \int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+2y} dy dx$$

$$\text{b) } \int_0^3 \int_{-1}^1 \int_2^4 y - xz dz dy dx$$

$$\text{c) } \int_0^2 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$$

$$\text{d) } \int_{-1}^1 \int_0^x \int_{x-y}^{x+y} (z - 2x - y) dz dy dx$$

2. Számítsuk ki az f függvény integrálját a T tartományon, ahol

$$\text{a) } f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y}, \quad T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\};$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{y}{x+1}, \quad T \text{ az } y = x \text{ és } y = x^2 \text{ görbék által határolt korlátos tartomány};$$

$$\text{c) } f(x, y) = x + y, \quad T = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\};$$

$$\text{d) } f(x, y) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ ahol } T \text{ a } (0, 0), (1, 0), (0, 1) \text{ csúcsú háromszögtartomány};$$

$$\text{e) } f(x, y, z) = z, \quad T \text{ az } x, y, z \geq 0 \text{ nyolcadtérből a } 2x + y + z = 4 \text{ sík által kimetszett korlátos tartomány}$$

3. Számítsuk ki az $y = 0, y = 2, z = 0, z = 2 - 2x^2$ felületek által határolt korlátos tartomány térfogatát!

4. Az integrálás sorrendjének felcserélésével számítsuk ki az alábbi kettősintegrálokat!

$$\text{a) } \int_0^2 \int_{1+y^2}^5 ye^{(x-1)^2} dx dy$$

$$\text{b) } \int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx dy$$

5. Használjunk alkalmas polár-koordinátarendszert a következő integrálok kiszámításához!

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 \text{ integrálja az origó körüli } 1 \text{ sugarú körlap első nyolcadán}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ integrálja a } T = \{(x, y) \mid x^2 - 2x + y^2 = 0\} \text{ tartományon}$$

$$\text{c) } \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} 1 dx dy$$

$$\text{d) } \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

$$\text{e) } \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{\sqrt{y^2+z^2}} x dx dy dz$$

$$\text{f) } \int \int \int_T \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

$$\text{ahol } T = \{(x, y, z) \mid \sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z, 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 81\}$$

6. Számítsuk ki az alábbi tartományok térfogatát:

$$\text{a) A } z = x^2 + y^2 \text{ és } z = 27 - 2x^2 - 2y^2 \text{ paraboloidok által határolt korlátos tartomány};$$

$$\text{b) Az } 1 \text{ sugarú göbből } 90^\circ\text{-os nyílásszögű, a gömb középpontjába eső csúcsú kúp által kivágott rész};$$

$$\text{c) A } T = \{(x, y, z) \mid z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \geq 1, z > 0\}.$$