1. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!*

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -3x & + & y & + & 2z & = & 11 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & 5z & + & u & = & 3 \\ x & - & y & + & z & + & 2u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 6z & - & u & = & 2 \end{array}$$

Megoldás: a) Elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra hozzuk a kibővített mátrixot:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & 20 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 20 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Ebből leolvasható a megoldás: $x = 2,\ y = 3,\ z = 7.$

b) A kibővített mátrix redukált lépcsős alakja $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, a megoldás:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{4}{3}s - t \\ \frac{1}{3} + \frac{7}{3}s + t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. *Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását, vektoros alakban is!*

$$a)\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \quad b)\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad c)\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$d)\ \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad e)\ \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Megoldás: a) Lépcsős, de nem redukált (az első sor vezéreleme nem 1). A lépcsős alakból is leolvasható, hogy nincs megoldása az egyenletrendszernek.

b) Redukált lépcsős, a megoldás $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, azaz $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) Nem lépcsős.

d) Redukált lépcsős. Két szabad változója van, x_2 és x_4. Ezeknek tetszőleges $s, t \in \mathbb{R}$ paraméterértéket adva a megoldás $x_1 = 1 - 2t$, $x_2 = s$, $x_3 = 2 - 3t$, $x_4 = t$, azaz

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e) Lépcsős, de nem redukált (a második vezéregyes oszlopában van másik nem nulla elem).

3. *Oldjuk meg azokat a lineáris egyenletrendszereket, amelyeknek a kibővített mátrixa*

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *b)* $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1+i \\ 1 & 1 & -2i & -2 \\ 1+i & -1 & -4 & -3 \end{array}\right]$ *c)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$

Megoldás:

a) A redukált lépcsős alak: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, a megoldás: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1+i \\ 1 & 1 & -2i & -2 \\ 1+i & -1 & -4 & -3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2i & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1+i \\ 0 & -2-i & -6+2i & -1+2i \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3-2i & -3-i \\ 0 & 1 & 3 & 1+i \\ 0 & 0 & 5i & 5i \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & -2+i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát a megoldás $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ -2+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) A lépcsős alak, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ mutatja, hogy az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

4. *Határozzuk meg a következő síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit egyenletét vektorosan és koordinátánként is!*

a) $2x - y + 3z = 3,\ \ x + y + z = 4,\ \ -x + 2y - z = 2;$

b) $2x - y + 3z = 3,\ \ x + y + z = 4,\ \ 3y - z = 5;$

c) $x + 3y + z = 2,\ \ x + 2y + 2z = 5.$

Megoldás: a) A metszet az $(1, 2, 1)$ pont.

b) Az egyenletrendszer redukált lépcsős alakja $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, és ebből leolvasható, hogy a metszet egy egyenes, amelynek vektoros egyenlete

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{koordinátásan:} \quad \begin{array}{rcrcr} x & = & \frac{7}{3} & - & \frac{4}{3}t \\ y & = & \frac{5}{3} & + & \frac{1}{3}t \\ z & = & & & t \end{array}$$

c) A metszetük egy egyenes, amelynek a vektoros egyenlete:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{koordinátásan:} \quad \begin{array}{rcrcr} x & = & 11 & - & 4t \\ y & = & -3 & + & t \\ z & = & & & t \end{array}$$

Tehát a metszet az az egyenes, amely átmegy a $(11, -3, 0)$ ponton, és irányvektora $(-4, 1, 1)$.

5. *Adjuk meg az S_1 : $2x - y + z = 1$ sík explicit (paraméteres) egyenletét, illetve egyenletrendszerét! (Oldjuk meg az egyenletet mint egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan!)*

Megoldás: Az egyenlet(rendszer) redukált lépcsős alakja $\left[1 \;\; -\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2} \;\; \middle| \;\; \frac{1}{2}\right]$, aminek a vektoros megoldása $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, tehát a sík (egy lehetséges) paraméteres egyenletrendszere $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t,\;\; y = s,\;\; z = t.$

6. *Oldjuk meg az 1.a) feladatban szereplő egyenletrendszert $\mathbb{Z}_5$ fölött is! Hány megoldása van?*

Megoldás: Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ egész szám $\mathbb{Z}_5$-beli számot is jelent (úgy értve, hogy n darab 1-nek az összege, vagy negatív n esetén $|n|$ darab 1 összegének a negatívja. Tehát egy $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$-beli számot felírhatunk tetszőleges olyan egész számként, aminek ugyanaz az öttel való osztásnál a maradéka. A műveleteknél is ennek megfelelően írjuk fel az eredményt. Osztani természetesen csak nem nullával, azaz öttel nem osztható számmal lehet.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & 20 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A vektoros megoldás $\begin{bmatrix} 1+2t \\ t \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Mivel t ötféle értéket vehet fel, az egyenletrendszernek $\mathbb{Z}_5$-ben öt megoldása van.

7. *Lineárisan függetlenek-e az $(1, 2, -1, 0), (1, 1, 2, 1), (2, 0, 1, 3) \in \mathbb{R}^4$ vektorok?*

Megoldás: Akkor függetlenek, ha az

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{azaz az} \quad \begin{bmatrix} x + y + 2z \\ 2x + y \\ -x + 2y + z \\ y + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogén egyenlet(rendszer)nek csak triviális megoldása van. Az együtthatómátrix lépcsős alakja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mutatja, hogy az egyenletrendszernek csak egy megoldása van, tehát a három vektor független.

8. *Állítsuk elő a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -1, 3)$ és $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -2, -1)$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = (0, -1, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$ és $\mathbf{c} = (3, 2, -2, 3)$ vektorok közül azokat, amelyeket lehet!*

Megoldás: Érdemes a három vektor előállítását szimultán egyenletrendszerként kiszámolni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \mapsto \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

A három konstansoszlopot külön tekintve leolvashatók a megoldások: $\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{b}$ nem állítható elő, és $\mathbf{c} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

9. *Vektorteret alkotnak-a a következő halmazok a természetesen definiált összeadásra és skalárral való szorzásra nézve?*

a) A valós polinomok halmaza, $\mathbb{R}[x]$ az $\mathbb{R}$ test fölött.
b) A legfeljebb n-edfokú valós polinomok.
c) A pontosan n-edfokú valós polinomok.
d) $\mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött.
e) $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}_2$ fölött.

Megoldás: a) Igen, könnyen ellenőrizhető, hogy a polinomok összeadása és skalárral (azaz konstanssal) szorzása kielégíti a vektortér axiómáit.

b) Mivel ez részhalmaza az $\mathbb{R}[x]$-nek, elég belátni, hogy nem üres, és zárt a műveletekre nézve, azaz, hogy altere $\mathbb{R}[x]$-nek. Ez pedig igaz, mert két legfeljebb n-edfokú polinom összege, és egy ilyen polinom skalárszorosa is legfeljebb n-edfokú (a 0 polinomot is úgy tekintjük, hogy legfeljebb n-edfokú).

c) Nem vektortér, mert nem is zárt a műveletekre nézve. Például $(x^2 + x - 2) + (-x^2 + 2x + 1) = 3x - 1$ két másodfokú polinom összege, de csak elsőfokú.

d) Igen a $\mathbb{C}$ test tulajdonságaiból következik, hogy az összes vektortéraxióma is teljesül.

e) Ha vektortér lenne, akkor a skalárral való szorzás csak az $1 \cdot a = a$ és $0 \cdot a = 0$ lehetne tetszőleges $a \in \mathbb{R}$-re, mert az első szerepel a vektortér-axiómák között, a második pedig egyszerűen következik az axiómákból. De akkor $0 = 0 \cdot a = (1 + 1) \cdot a = 1 \cdot a + 1 \cdot a = a + a = 2a$, de $2a \neq 0$, ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$.