1. *Hány megoldása lehet az alábbi lineáris egyenletrendszereknek a valós számok körében, ha a $*$-ok tetszőleges (nem feltétlenül egyenlő) számokat jelölnek?*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & * & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Megoldás: Az első egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, mert a mátrixának lépcsős alakjában nincs ellentmondásos sor, és van olyan oszlop (az első), amelyben nincs vezérelem, tehát van szabad változó.

A második egyenletrendszer megoldásszáma függ a * értékétől. Ha a * helyén 0 áll, akkor a harmadik sor ellentmondásos, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ha * nem nulla, akkor a lépcsős alakban nincs ellentmondásos sor, de van szabad változó, tehát végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

A harmadik egyenletrendszernek mindenképpen van megoldása, mert homogén. Egyetlen megoldása van, ha az első sor csillaga, és a másik két csillag közül valamelyik nem nulla, az összes többi esetben végtelen sok megoldása van.

A negyedik egyenletrendszernek mindenképpen egyértelmű megoldása van, mert lépcsős alakú, nincs ellentmondásos sor, és minden oszlopban van vezérelem.

2. *Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixokhoz tartozó egyenletrendszereknek?*

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 3 & -2 & a & b \\ -3 & -6 & a-b & 2b \end{array}\right]$ *b)* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & a & 1 \end{array}\right]$

Megoldás: A megoldások számának megállapításához elég lépcsős alakra hozni a mátrixot, nem szükséges a redukált lépcsős alak.

a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 3 & -2 & a & b \\ -3 & -6 & a-b & 2b \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 0 & -8 & -2a-3b & b \\ 0 & 0 & 4a+2b & 2b \end{array}\right]$$

Ha $4a+2b \neq 0$, azaz ha $b \neq -2a$, akkor egyértelmű megoldás van.
Ha $b = -2a \neq 0$, akkor nincs megoldás, mert a második mátrixnak van ellentmondásos sora.
Ha $b = -2a$ és $b = 0$, azaz ha $a = b = 0$, akkor is lépcsős alakú a második mátrix, de nincs ellentmondásos sora, és van szabad változója, tehát ekkor végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & a & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & b+3 \\ 0 & 2 & a & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}b+1 \\ 0 & 0 & a-\frac{2}{3} & -1-\frac{2}{3}b \end{array}\right]$$

Egy megoldás van, ha $a \neq \frac{2}{3}$, végtelen sok megoldás van, ha $a = \frac{2}{3}$, és $b = -\frac{3}{2}$, végül nincs megoldás ha $a = \frac{2}{3}$, és $b \neq -\frac{3}{2}$

3. *Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi részhalmazok? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát is!*

a) $\{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1 \,\}$
b) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\,\}$
c) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\,\}$
d) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\,\}$
e) $\{(x, y, z) \mid x^3 + y^3 + z^3 = 0\,\}$

Megoldás: a) Nem altér, mert $\mathbf{0}$ nem eleme ennek a részhalmaznak.

b) Altér, ugyanis egy K test fölötti n-változós homogén lineáris egyenlet(rendszer)nek megoldásai mindig alteret alkotnak K^n-ben. A megoldás vektoros alakjában szereplő vektorok bázist alkotnak a megoldástérben. Az egyenlet kibővített mátrixa $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$ lépcsős mátrix, a megoldás $y = s$, $z = t$, $x = -2s - t$, azaz $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, így az altér bázisa $\{(-2, 1, 0),\ (-1, 0, 1)\,\}$.

c) Nem altér, mert nem tartalmazza a $\mathbf{0}$-t.

d) Ez a halmaz csak a $(0, 0, 0)$ vektorból áll, az pedig nyilván alteret alkot (az önmagával vett összege és tetszőleges skalárszorosa is a 0 vektor). A bázisa az üreshalmaz.

e) Nem altér. Igaz, hogy zárt a skalárral való szorzásra (ha $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, akkor $(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 + (\lambda z)^3 = \lambda^3(x^3 + y^3 + z^3) = \lambda^3 \cdot 0 = 0$), de az összeadásra nem. Pl. $(1, -1, 0)$ és $(1, 0, -1)$ benne van ebben a halmazban, de $(2, -1, -1)$ nincs.

4. *Tegyük fel, hogy $\{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \,\}$ bázisa egy V valós vektortérnek. Döntsük el, hogy az alábbiak független rendszert, generátorrendszert, bázist alkotnak-e V-ben!*

a) $\{\, \mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2{+}\mathbf{b}_3 \,\}$ *b)* $\{\, \mathbf{b}_1{+}\mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_1{-}\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2{+}2\mathbf{b}_3 \,\}$ *c)* $\{\, \mathbf{b}_1{+}\mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_2{+}\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_3{+}\mathbf{b}_1 \,\}$

Megoldás: a) Független, mert ha $x\mathbf{b}_1 + y(\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) = \mathbf{0}$, akkor $x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + y\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$, így a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ vektorok függetlensége miatt $x = y = 0$. Generátorrendszer nem lehet, mert akkor bázis is lenne, és minden bázisnak ugyanannyi eleme van.

b) Nem lehet független, mert akkor kiegészíthető lenne egy legalább 4 elemű bázissá. Generátorrendszer, mert ha az általuk generált altér U, akkor $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_1 \in U \Rightarrow \mathbf{b}_2 = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) - \mathbf{b}_1 \in U$, és $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_1 \in U \Rightarrow \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3) \in U$, akkor viszont $\{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \,\}$ minden lineáris kombinációja benne van U-ban, tehát a teljes V vektortér is.

c) A b) részhez hasonló módon belátjuk, hogy a három vektor által generált altérben benne van $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ is. A három vektor összege $2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3 \in U \Rightarrow \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \in U$, és ha ebből levonjuk külön-külön a három megadott vektort, akkor azt kapjuk, hogy $\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_1 \in U$. Tehát $\{\, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_1 \,\}$ generátorrendszer, és egy háromelemű generátorrendszer egy 3-dimenziós térben szükségképpen független (különben lenne kisebb elemszámú generátorrendszer, és végső soron bázis is), így ez a generátorrendszer bázis.

5. *Vegyük $\mathbb{R}^3$-ben a $\mathcal{B} = \{(1, 3, -1), (0, 1, 1), (2, -1, 0)\,\}$ bázist. Melyik az a $\mathbf{v}$ vektor, amelynek $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektora $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, és mi a $\mathbf{w} = (3, 0, -3)$ vektor koordinátavektora $\mathcal{B}$ szerint?*

Megoldás: $\mathbf{v} = 1 \cdot (1, 3, -1) + 2 \cdot (0, 1, 1) - 1 \cdot (2, -1, 0) = (-1, 6, 1)$. $\mathbf{w}$-hez olyan x, y, z

számokat kell keresnünk, amelyekre $x \cdot (1,3,-1) + y \cdot (0,1,1) + z \cdot (2,-1,0) = (3,0,-3)$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. *Adjuk meg az alábbi mátrixok sorterének és oszlopterének egy-egy bázisát! Írjuk fel a többi sor-, illetve oszlopvektort ezek lineáris kombinációjaként!*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Megoldás: a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az elemi sorműveletek megváltoztatják a mátrix oszlopterét, de megtartják az oszlopok közti lineáris kapcsolatokat. Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ az eredeti mátrix oszlopai, $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4, \mathbf{v}'_5$ pedig a redukált lépcsős alaké. Ekkor a vezéregyest tartalmazó $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{e}_1$ és $\mathbf{v}'_3 = \mathbf{e}_2$ oszlopok nyilván bázist alkotnak az utóbbi mátrix oszlopterében, és a többi oszlop előállítása is közvetlenül leolvasható a mátrixból: $\mathbf{v}'_2 = 2\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_4 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = -\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_3$, $\mathbf{v}'_5 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_3$. Tehát az eredeti mátrix oszlopterének bázisa

$$\{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \,\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{és az előállítások:} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_4 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az elemi sorműveletek nem változtatják meg a sorteret, és a redukált lépcsős alak nem nulla sorai lineárisan függetlenek, így bázisát adják a sortérnek. Ebben az esetben ez a bázis $\{(1,2,0,-1,1),\ (0,0,1,1,1)\,\}$. Mivel a vezéregyesek oszlopaiban csak egy 1-es van, a többi elem 0, a mátrix sorainak a redukált lépcsős alak soraiból való előállításának együtthatóit megadják az adott sorokban a vezéregyesek pozíciójában (jelen esetben az első és harmadik helyen) álló számok:

$$(1,2,0,-1,1) = 1 \cdot (1,2,0,-1,1) + 0 \cdot (0,0,1,1,1)$$

$$(2,4,1,-1,3) = 2 \cdot (1,2,0,-1,1) + 1 \cdot (0,0,1,1,1)$$

$$(-1,-2,1,2,0) = -1 \cdot (1,2,0,-1,1) + 1 \cdot (0,0,1,1,1)$$

Vegyük észre, hogy az oszloptér bázisának meghatározásakor az eredeti oszlopvektorokból választottunk ki egy bázist (azaz egy maximális független rendszert), a soroknál új báziselemeket találtunk.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

redukált lépcsős alak. Ennek alapján az eredeti mátrix 1., 2. és 4. oszlopa bázisát adja az oszlopterének:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{és a 3. oszlop:} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A sortérnek bázisa $\{(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$, és az eredeti mátrix sorainak előállítása:

$$(1,2,3,1) = (1,0,1,0) + 2(0,1,1,0) + (0,0,0,1),$$

$$(1,-2,-1,0) = (1,0,1,0) - 2(0,1,1,0),$$

$$(0,1,1,-1) = (0,1,1,0) - (0,0,0,1),$$

$$(1,1,2,3) = (1,0,1,0) + (0,1,1,0) + 3(0,0,0,1).$$

7. *Lineárisak-e a következő, $\mathbb{R}^3$-ön ható leképezések? Melyik vektortérbe képeznek?*

a) $(1,1,1)$*-gyel való skalárszorzás*

b) a középső koordináta elhagyása

c) az $x - 2y + z = 5$ *síkra való tükrözés*

d) $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - ((1,-1,0) \times \mathbf{v})$

e) $\mathbf{v} \mapsto |\mathbf{v}|$

Megoldás: a) $\mathbb{R}$-be képez, és lineáris: az $\mathbf{a} = (1,1,1)$ jelöléssel $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{a} = \mathbf{ua} + \mathbf{va}$ és $(\lambda\mathbf{u})\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{ua})$.

b) $\mathbb{R}^2$-be képez, és lineáris: $f(x,y,z) = (x,z)$-re $f(x+x', y+y', z+z') = (x+x', z+z') = (x,z) + (x',z') = f(x,y,z) + f(x',y',z')$, és $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, \lambda z) = \lambda(x,z) = \lambda f(x,y,z)$.

c) $\mathbb{R}^3$-be képez. Nem lineáris, mert minden lineáris leképezés $\mathbf{0}$-ba képezi a $\mathbf{0}$ vektort (ugyanis $f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$), de $\mathbf{0}$ nincs ezen a síkon, így a tükrözés nem hagyja helyben.

d) $\mathbb{R}^3$-be képez, és lineáris: az $\mathbf{a} = (1,-1,0)$ jelöléssel $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathbf{a} \times (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}) - (\mathbf{a}\times\mathbf{u} + \mathbf{a}\times\mathbf{v}) = (\mathbf{u} - \mathbf{a}\times\mathbf{u}) + (\mathbf{v} - \mathbf{a}\times\mathbf{v})$, és $\lambda\mathbf{v} - \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} - \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{a}\times\mathbf{v})$.

e) $\mathbb{R}$-be képez, de nem lineáris: $|(-2)(1,0,0)| = |(-2,0,0)| = 2 \neq -2 = (-2)|(1,0,0)|$.

8. *Tekintsük a legföljebb harmadfokú valós polinomok $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ terén a $p(x) \mapsto xp'(x)$ leképezést. Bizonyítsuk be, hogy ez lineáris transzformáció! Hány dimenziós a magtere és a képtere?*

Megoldás: $x(p(x) + q(x))' = x(p'(x) + q'(x)) = xp'(x) + xq'(x)$, és $x(cp(x))' = xcp'(x) = c(xp'(x))$, ha $c \in \mathbb{R}$, tehát a leképezés lineáris, és a 4-dimenziós $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ térből önmagába képez.

$xp'(x)$ pontosan akkor lesz a 0 polinom, ha $p'(x) \equiv 0$, azaz, ha $p(x)$ konstans. Tehát a magtérnek egyelemű bázisa van (pl. a konstans 1 polinom), azaz a magtér 1-dimenziós, és így a dimenziótétel szerint a képtér dimenziója $4 - 1 = 3$.