1. *Legyen*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = [\,1 \quad 2 \quad 1\,], C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixműveletek közül végezzük el azokat, amelyek értelmezve vannak!

$$A + A, \quad A + B, \quad AB, \quad AC, \quad AC + 2C, \quad AD - 3D, \quad D^2, \quad CC^T, \quad BC, \quad CB.$$

Megoldás: $A + B$, AB, D^2 nincsenek értelmezve.

$$A+A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad AC = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad AC+2C = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 26 \end{bmatrix} \qquad AD-3D = \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 10 & 20 \\ 11 & 26 \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad BC = [\,6\,] \qquad CB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2. *Igazak-e minden $n \times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?*

a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;

b) $(A + I_n)(A - I_n) = A^2 - I_n^2$;

c) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

d) $(AB)^T = A^T B^T$.

Megoldás: a) Nem igaz, mert $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$, és általában $AB \neq BA$, pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$-re és $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$-re

$(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Igaz: $(A + I)(A - I) = A^2 + IA - AI - I^2 = A^2 + A - A - I^2 = A^2 - I^2$

c) Ugyanúgy nem igaz, mint az a). Ez is azon múlik, hogy általában $AB \neq BA$.

d) Nem igaz, helyesen $(AB)^T = B^T A^T$. Pl. az a) ellenpéldájára

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (AB)^T$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, és $A^T B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. *Egy mátrixot szimmetrikusnak nevezünk, ha $A^T = A$. Az 1. feladat mátrixai között van-e szimmetrikus? Bizonyítsuk be, hogy AA^T mindig szimmetrikus mátrix!*

Megoldás: Az 1. feladat A mátrixa szimmetrikus.

$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$.

4. *Legyen* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Mik az XA oszlopai, ha X oszlopai $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$?

b) Mik az AY sorai, ha Y sorai $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$?

Megoldás: Az AB mátrix oszlopai az A oszlopainak lineáris kombinációi a B megfelelő oszlopából vett együtthatókkal,

a sorai pedig a B sorainak lineáris kombinációi az A megfelelő sorából vett együtthatókkal.

a) $\mathbf{o}_1$, $2\mathbf{o}_2$ és $\mathbf{o}_1 + \mathbf{o}_2$.

b) $\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_3$ és $2\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3$.

5. *Határozzuk meg a következő mátrixok rangját! (A mátrix rangja az oszlopterének és egyúttal a sorterének a dimenziója, ami megegyezik a lépcsős alakjában a nem nulla sorok számával.)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{r}(A) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 0 & -5i & -7i \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 0 & -5i & -7i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{r}(B) = 2$$

A C mátrixról rögtön látszik, hogy a sorai egymás skalárszorosai (és persze az oszlopai is), tehát csak egy független választható ki közülük. Így a C mátrix rangja 1.

6. *Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban, illetve az a) és h) részben szereplő lineáris transzformációk esetén a megadott $\mathcal{B}$ bázisban is. $\mathbb{R}^n$ standard bázisa $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} = \{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$, a $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ vektortér standard bázisa $\{1, i\}$, a 2×2-es valós mátrixok terének, $\mathbb{R}^{2\times 2}$-nek a standard bázisa pedig $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.*

- *a) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1,0), (1,1)\}$;*
- *b) az $\mathbf{i} = (1,0,0)$ vektorral balról való vektoriális szorzás;*
- *c) az $(1,-1,2)$ vektorral balról való vektoriális szorzás;*
- *d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x,y,z)) = (x+y, x+y)$;*
- *e) a 2×2-es valós mátrixokon a transzponálás;*
- *f) egy adott $a+bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;*
- *g) a sík α szögű elforgatása az origó körül.*
- *h) Az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard bázisban, $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (2,1,0), (1,-2,1)\}$*

Megoldás: a) $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, így a standard bázisban a transzformáció mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. A $\mathcal{B}$ bázis elemeinek képe, és a képek koordinátavektora $\mathcal{B}$ szerint:

$$\mathbf{b}_1 = (1,0) \mapsto (0,1) = (-1)\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1) \;\Rightarrow [f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = (1,1) \mapsto (1,1) = 0\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1) \;\Rightarrow [f(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Így } [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{j}$, így a standard mátrix oszlopai rendre az $\mathbf{0}$, $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{j}$ koordinátavektorai, azaz a mátrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Ebben az esetben érdemesebb kiszámolni a vektoriális szorzatot egy általános (x,y,z) vektorra. $(1,-1,2) \times (x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-z-2y,\ 2x-z,\ y+x)$, tehát az A

standard mátrixra

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y-z \\ 2x-z \\ x+y \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Ha A a standard mátrix, akkor

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

e) Mivel $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, a transzformáció standard A mátrixának hatása a koordinátavektorokon:

$$A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

f) $1 \mapsto 1$, amelynek koordinátavektora $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $i \mapsto -i$, amelynek koordinátavektora $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, így a standard mátrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

g) Az α szögű forgatást komplex szorzással a legkönnyebb kiszámolni: $(x+yi)(\cos\alpha+i\sin\alpha) = x\cos\alpha - y\sin\alpha + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$. Ha a komplex számokat $\mathbb{R}^2$ vektorainak tekintjük, azt kapjuk, hogy $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ képe a forgatásnál $\begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix}$. Így a mátrix $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

h) Egy $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont képét megkaphatjuk úgy, hogy a ponton átmenő, a síkra merőleges (azaz a sík normálvektorával, $(1,-2,1)$-gyel párhuzamos) egyenest elmetsszük a síkkal. Az egyenes egyenletrendszere $x = x_0 + t$, $y = y_0 - 2t$, $z = z_0 + t$, ez a sík egyenletébe behelyettesítve:

$$(x_0+t) - 2(x_0-2t) + (z_0+t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{6}x_0 + \frac{2}{6}y_0 - \frac{1}{6}z_0$$

$$P_0'\left(\frac{5}{6}x_0 + \frac{2}{6}y_0 - \frac{1}{6}z_0,\ \frac{2}{6}x_0 + \frac{2}{6}y_0 + \frac{2}{6}z_0,\ -\frac{1}{6}x_0 + \frac{2}{6}y_0 + \frac{5}{6}z_0\right),$$

tehát a vetítés standard mátrixa $\begin{bmatrix} 5/6 & 2/6 & -1/6 \\ 2/6 & 2/6 & 2/6 \\ -1/6 & 2/6 & 5/6 \end{bmatrix}$.

A $\mathcal{B}$ bázisban való felíráshoz érdemes észrevennünk, hogy $(1,1,1)$ és $(2,1,0)$ a síkkal párhuzamos vektorok (a sík átmegy az origón, és ezek a vektorok kielégítik a sík egyenletét), $(1,-2,1)$ pedig a sík normálvektora. Tehát az első két bázisvektor képe önmaga (így a kép koordinátavektora $\mathbf{e}_1$, illetve $\mathbf{e}_2$), míg a harmadik vektor képe $\mathbf{0}$.

Tehát a transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. *Írjuk fel az* $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ *leképezés mátrixát! Állapítsuk meg a mátrix rangját! Hány dimenziós* f *képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!*

Megoldás: Legyen A a leképezés standard mátrixa, és hozzuk A-t elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből leolvasható, hogy a mátrix rangja 2 (a lépcsős alaknak két nem nulla sora van), ami megegyezik a képtér, azaz a mátrix oszlopterének dimenziójával, és a magtér dimenziója a dimenziótétel szerint $3 - 2 = 1$. A képtérnek bázisát adják az A mátrixnak azok az oszlopai, amelyek helyén a redukált lépcsős alakban vezéregyest tartalmazó oszlop áll, azaz $\operatorname{Im} f$ bázisa $\{(1, 1, 2, -1),\ (1, 0, 1, 0)\}$, a magtér pedig az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldástere. A megoldás vektoros alakja $t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, így a magtér bázisa $\{(-1, 3, 1)\}$.