1. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat!*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Megoldás: a) Első sor szerinti kifejtéssel:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(2-12) - 2(1-8) - (3-4) = 5.$$

b) A sorok lineárisan összefüggők (az első két sor összege a harmadik), ezért a determináns 0. De ki is fejthetjük az első sor szerint:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 = 2 - 2 = 0.$$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$

d) A második sor szerint kifejtve: $-(-1) \cdot (8-3) - 1 \cdot (1-4) = 8.$

2. *Használjunk elemi sor- vagy oszlopműveleteket a determinánsok egyszerűsítéséhez, és így számítsuk ki a determinánsok értékét!*

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Megoldás: a) Öt sorcserével és két determinánst nem változtató elemi sorművelettel felső háromszög alakra tudjuk hozni a determinánst:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 2 = 8.$$

b) Egy elemi sorművelettel elérhető, hogy az utolsó oszlopban csak egy nem nulla elem legyen, és aztán az utolsó oszlop szerint fejtünk ki.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

A negyedik, majd a harmadik, aztán a második sor szerint kifejtve, a determináns

$$4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 144.$$

d) Adjuk hozzá az első sorhoz a többi hármat, emeljünk ki 5-öt, és az így kapott első sort vonjuk ki a többiből, így háromszögmátrixot kapunk.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

3. *Számítsuk ki a következő $n \times n$-es mátrixok determinánsát!*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Megoldás: a) $\left[\frac{n}{2}\right]$ sorcserével (az első sort az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, stb. cseréljük fel) az egységmátrixot kapjuk. Így a determináns $(-1)^{[n/2]}$, azaz 1, ha $n = 4k$ vagy $4k + 1$, és -1, ha $n = 4k + 2$ vagy $4k + 3$ alakú.

b) Adjuk hozzá az első sort az összes többihez! Ekkor felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek az átlójában rendre $1, 2, 3, \dots, n$ van, így a determináns $n!$.

c) A második oszlopot vonjuk ki az elsőből, majd a keletkezett mátrixban a második, $(0, 2, 2, \dots)$ sort az összes alatta levőből. Ekkor felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek az átlójában rendre $-1, 2, 1, 2, 3, \dots, n-2$ áll, így a determináns $-2 \cdot (n-2)!$.

4. *Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?*

Megoldás: $|2A^{-1}| = 2^5 \cdot |A^{-1}| = 2^5 \cdot |A|^{-1} = \frac{32}{3}$

$|(2A)^{-1}| = |2A|^{-1} = (2^5 \cdot |A|)^{-1} = 96^{-1} = \frac{1}{96}$.

$|A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}| = |A|^2 \cdot |A^T| \cdot |A^{-1}| = |A|^2 \cdot |A| \cdot |A|^{-1} = |A|^2 = 9$.

5. *Legyen* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *és* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Szimultán egyenletrendszerként oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket!*

a) $AX = B$

b) $BX = A$

c) $XA = B$ *(azaz $A^T X^T = B^T$)*

Megoldás: a) Az $AX = B$ egyenlet azt jelenti, hogy ha X oszlopai $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{x}_3$, a B oszlopai pedig $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$, akkor $A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ teljesül $i = 1, 2, 3$-ra.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \end{array}\right]$ mutatja, hogy az egyenletrendszer ellentmondásos (az első és a harmadik oszlop nem áll elő), tehát nincs ilyen X mátrix.

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & -5 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -7 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{és így } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

6. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok közül az invertálhatók inverzét!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Számítsuk ki az inverzeket szimultán egyenletrendszerként: ha M négyzetes, akkor az $MX = I$ mátrixegyenlet (szimultán egyenletrendszer) megoldása M^{-1}, feltéve, hogy az egyenletrendszer megoldható.

a) $[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] = [I|A^{-1}] \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$

b) B nem invertálható, mert nem négyzetes.

c) $[C|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] = [I|C^{-1}] \quad \Rightarrow \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $[D|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Már ezen a ponton is látszik, hogy ellentmondásos az egyenletrendszer, tehát a D mátrix nem invertálható. Mellesleg ezt a Gauss-elimináció elkezdése előtt is megállapíthatjuk, ha például kiszámítjuk D determinánsát (ami 0), vagy ha észrevesszük, hogy az első és a második sor kétszeresének különbsége a harmadik sort adja, vagyis D sorai lineárisan összefüggők.

7. *Számítsuk ki a mátrixok inverzét az aldeterminánsaik segítségével!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: a) $|A| = 4$, $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, így $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $|B| = 1 \cdot (-2-1) + 2 \cdot (3+1) = 5$, és $\operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow$

$B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

d) $|D| = 2 \cdot (-1-3) - 1 \cdot 1 = -9$, $\operatorname{adj} D = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}^T \Rightarrow$

$D^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

8. *A Cramer-szabály felhasználásával határozzuk meg y értékét az alábbi egyenletrendszerek megoldásában!*

$$a)\ \begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & -2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 9 \end{array}$$

Megoldás: a)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-7-10+12}{-3+8} = -1.$$

Mellesleg észrevehetjük, hogy az együtthatómátrix éppen a 7. feladat B mátrixa, amelynek ott kiszámoltuk az inverzét, tehát az egyenletrendszer megoldása abból is kijön: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{54}{27} = 2.$$