1. *Adjuk meg annak a T lineáris transzformációnak a standard mátrixát, amelyre*

a) $f : (1,0) \mapsto (3,1),\ \ (1,1) \mapsto (-1,2)$.

b) $f : (1,1,0) \mapsto (0,1,4),\ \ (1,0,1) \mapsto (1,2,4),\ \ (0,1,1) \mapsto (-1,3,2)$.

Megoldás: a) A standard mátrix oszlopai az $(1,0)$ és $(0,1)$ vektorok képei. Az $(1,0)$ képe meg van adva, a másik könnyen kiszámolható: mivel f lineáris,
$f(0,1) = f((1,1)-(1,0)) = f(1,1) - f(1,0) = (-1,2) - (3,1) = (-4,1)$.
Így a transzformáció standard mátrixa $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Itt is kiszámíthatjuk a megadott vektorokból az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ képét, de a mátrixegyenlet megoldása az általános módszer. Olyan A mátrixot kell keresnünk, amelyre

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad A\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}$$

azaz

$$A\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 2 & 3\\4 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

Mátrixinvertálással (vagy a transzponáltját szimultán egyenletrendszerként) megoldva:

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 2 & 3\\4 & 4 & 2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

2. *Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisban!*

a) $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, *ahol* $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 3 & 2\end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{(1,2,0),(1,1,-1),(1,0,-1)\}$, $[f]_{\mathcal{B}} =?$

b) $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\0 & 2 & -1\\-1 & 1 & -2\end{bmatrix}$, *ahol* $\mathcal{B}$ *az a) részben szereplő bázis.* $[f]_{\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}} =?$

c) Az origó körüli $90°$*-os forgatás a* $\{(3,5),(2,3)\}$ *bázisban*

d) $f : (1,2) \mapsto (2,4),\ \ (-1,3) \mapsto (1,-3)$, $\mathcal{B} = \{(1,2),(-1,3)\}$. $[f]_{\mathcal{B}} =?$, $f_{\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}} =?$

e) Az $(1,1,0)$ *vektorral balról való vektoriális szorzás az* $\mathbb{R}^3$ *standard bázisában, és az* $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$ *és* $(1,1,0)\times(1,-1,0)$ *vektorokból álló bázisban.*

Megoldás: a)

Az áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & 0\\0 & -1 & -1\end{bmatrix}$, inverze $P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-2 & 1 & -2\\2 & -1 & 1\end{bmatrix}$, így

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix}10 & 3 & -1\\-15 & -4 & 2\\8 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

b) $P^{-1}[f]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}}P = [f]_{\mathcal{B}}$, ezért $[f]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = P[f]_{\mathcal{B}}P^{-1}$, amiből

$$[f]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 & -10 \\ 0 & -1 & -5 \\ 13 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

c) A transzformáció standard mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, a $\mathcal{B}$ bázisban felírt mátrixa

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 13 \\ -34 & -21 \end{bmatrix}.$$

d) Itt a $\mathcal{B}$ bázisban könnyű felírni a mátrixot (legyen az a mátrix B), és ebből megkaphatjuk a standard A mátrixot a $B = P^{-1}AP$, azaz $A = PBP^{-1}$ összefüggés segítségével, ahol $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ az áttérési mátrix.

$f(1,2) = (2,4) = 2 \cdot (1,2) + 0 \cdot (-1,3)$ koord. vektora $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$f(-1,3) = (1,-3) = 0 \cdot (1,2) - 1 \cdot (-1,3)$ koord. vektora $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 18/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

e) Egy tetszőleges (x,y,z) vektor képe a transzformációnál

$$(1,1,0) \times (x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z,\ -z,\ y-x),$$

tehát a standard mátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az új $\mathbf{b}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{b}_2 = (1,-1,0)$ és $\mathbf{b}_3 = (1,1,0) \times (1,-1,0) = (0,0,-2)$ báziselemekre viszont könnyen látható, hogy $f(\mathbf{b}_1) = \mathbf{0}$ és $f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_3$. Végül $f(\mathbf{b}_3) = f(0,0,-2) = (-2,2,0) = -2\mathbf{b}_2$, így a mátrix a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. *Adjuk meg (számolás nélkül) a következő lineáris transzformációk sajátvektorait, sajátértékeit, magterét és képterét:*

a) az $x - y - 2z = 0$ síkra való tükrözés $\mathbb{R}^3$-ben;

b) az x tengelyre való $(1,1)$ irányú vetítés $\mathbb{R}^2$-ben;

c) $\mathbf{r} \mapsto (1,2,3) \times \mathbf{r}$ az $\mathbb{R}^3$-ben.

Megoldás: a) Sajátvektorok a sík normálvektorai -1 sajátértékkel, a síkkal párhuzamos nem nulla vektorok 1 sajátértékkel. A magtér $\{\mathbf{0}\}$, a képtér $\mathbb{R}^3$.

b) Sajátvektorok az $(1,1)$ nem nulla skalárszorosai 0 sajátértékkel, az x tengely nem nulla vektorai 1 sajátértékkel. A magteret az $(1,1)$, a képteret az $(1,0)$ vektor generálja.

c) Mivel $(1,2,3) \times \mathbf{r}$ merőleges $\mathbf{r}$-re, csak úgy lehet egyúttal párhuzamos is vele, ha $(1,2,3) \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$, azaz ha $\mathbf{r}$ bárhuzamos az $(1,2,3)$ vektorral. Vagyis a sajátvektorok $t(1,2,3)$, ahol $0 \neq t \in \mathbb{R}$. A magtér az $(1,2,3)$ vektor által generált altér, a képtér az erre merőleges $x + 2y + 3z = 0$ sík.

4. *Írjuk fel a következő mátrixok karakterisztikus polinomját, majd számítsuk ki a saját-értékeiket és sajátvektoraikat! Melyek diagonalizálhatók $\mathbb{R}$ fölött? És $\mathbb{C}$ fölött?*

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4&-2\\1&2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3&0\\9&5\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-2&-8&-12\\1&4&4\\0&0&1\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}3&1&-2\\-1&0&1\\2&1&-1\end{bmatrix}.$$

Megoldás: $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=1,3$. Az 1-hez tartozó sajátvektorok az $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, azaz $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszer nemtriviális megoldásai: $t\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ $(t\neq0)$. A 3-hoz tartozó sajátvektorok pedig az $(A-3I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, azaz $\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszer nem $\mathbf{0}$ megoldásai: $t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $(t\neq0)$. Mivel a 2×2-es mátrixnak van két független valós sajátvektora, diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött, és a diagonális alakja $\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$.

$|B-\lambda I|=\lambda^2-6\lambda+10=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=3\pm i$. Tehát B-nek valós mátrixként nincs sajátértéke, így sajátvektora sem, ezért nem diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött. Viszont $\mathbb{C}$-ben van két különböző sajátértéke, így $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható.

C háromszögmátrix, így a sajátértékei leolvashatók az átlójából: 3 és 5. A mátrix 2×2-es, két különböző valós sajátértékkel, így szükségképpen diagonalizálható. (A sajátvektorai $\lambda_1=3$-hoz $(-2,9)$, $\lambda_2=5$-höz pedig $(0,1)$ nem nulla skalárszorosai.)

$|D-\lambda I|=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$. Mivel a mátrix háromszor hármas, és van három különböző valós sajátértéke, ezekhez pedig tartozik három független sajátvektor, D diagonalizálható is. A sajátvektorok az alábbi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ nem nulla skalárszorosai, és D diagonális alakja a $P=[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3]$ mátrixsszal való konjugált, $P^{-1}DP$.

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-4\\1\\0\end{bmatrix}\qquad\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-4\\0\\1\end{bmatrix}\qquad\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\qquad P^{-1}DP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$|E-\lambda I|=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=-\lambda(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=1$. A 0-hoz tartozó sajátvektorok $t\cdot(1,-1,1)$, és az 1-hez tartozók $t\cdot(1,0,1)$, ahol $t\neq0$. Mivel ezek közül csak két független választható ki, az E mátrix nem diagonalizálható sem $\mathbb{R}$, sem $\mathbb{C}$ fölött. (Másik indoklás: az 1 algebrai multiplicitása 2, de a geometriai csak 1, ezért a mátrix nem diagonalizálható.)

5. *Van-e a síkban olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvektora? És a térben? Melyek azok a lineáris transzformációk, amelyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora?*

Megoldás: Igen, például az origó körüli 90°-os forgatásnak nincs sajátvektora.

A térben viszont minden lineáris transzformációnak van sajátvektora. Ugyanis a karakterisztikus polinom harmadfokú, tehát feltétlenül van valós gyöke (a harmadfokú polinom olyan folytonos függvény, amely a $-\infty$-ben $-\infty$-hez, $+\infty$-ben $+\infty$-hez tart, így valahol felveszi a 0-t).

Ha minden nem nulla vektor sajátvektor, akkor csak egy sajátérték lehet, ugyanis ha $\lambda\neq\mu$ különböző sajátértékek, és $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ hozzájuk tartozó sajátvektorok, akkor $\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}$ függetlenek, tehát $f(\mathbf{v}+\mathbf{u})=\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{u}\neq\alpha\mathbf{v}+\alpha\mathbf{u}$ semelyik α skalárra, így ekkor $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ nem lenne sajátvektor. Ha λ az egyetlen sajátérték, és minden vektor λ-hoz tartozó sajátvektor, akkor f a λ-val való szorzás, és mátrixa (bármely bázisban) λI.

6. *Diagonalizálás segítségével számítsuk ki az* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrix n-edik hatványát!*

Megoldás: A 4. feladatban kiszámolt sajátvektorokkal, a $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ áttérési mátrixszal $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, ahol $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Így

$$A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{-1+3^n}{2} \\ \frac{-1+3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{bmatrix}.$$

7. *Legyen* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$. *Adjunk meg V-ben egy ortogonális bázist, és egészítsük ki ezt* $\mathbb{R}^3$ *egy ortogonális bázisává! Adjunk meg ugyanilyen tulajdonságú ortonormált bázisokat is V-ben és* $\mathbb{R}^3$*-ben!*

Megoldás: Az $x + y + z = 0$ egyenlet megoldásából azt kapjuk, hogy

$$V = \{s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ez kétdimenziós vektortér, és a $(-1, 1, 0)$-hoz könnyen választhatunk belőle ortogonális vektort:
a $(-1, 1, 0)(-s - t, s, t) = 2s + t = 0$ egyenletet kell hozzá megoldani. például $s = 1$ és $t = -2$-re az $(1, 1, -2)$ vektort kapjuk. Így $\{(-1, 1, 0), (1, 1, -2)\}$ ortogonális bázisa V-nek, és ennek ortogonális kiegészítője például $(-1, 1, 0) \times (1, 1, -2) = (-2, -2, -2)$, vagy egy skalárszorosa, $(1, 1, 1)$. Tehát $\mathbb{R}^3$-nek ortogonális bázisa $\{(-1, 1, 0), (1, 1, -2), (1, 1, 1)\}$. Ha ezeket a vektorokat leosztjuk a hosszukkal, a V-nek $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)\}$, $\mathbb{R}^3$-nek pedig $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$ ortonormált bázisa.

8. *Az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát:* $(1, 5, 3)$ *és* $(3, 0, -1)$. *Határozzuk meg A összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt!*

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

így ehhez a két vektorhoz tartozó sajátértékek a 6 és az 1. Mivel A szimmetrikus, létezik a sajátvektoraiból álló ortogonális bázis $\mathbb{R}^3$-ben, sőt bármely, sajátvektorokból álló ortogonális rendszert ki lehet egészíteni ilyenné. Ebben az esetben mindkét vektorra merőleges vektor csak a vektoriális szorzatuk skalárszorosa lehet. $(1, 5, 3) \times (3, 0, -1) = (-5, 10, -15)$, vagy a skalárszorosa, $(1, -2, 3)$ lehet a harmadik sajátvektor. Ezt az A mátrix $(-1, 2, -3)$-ba, azaz a -1-szeresébe viszi, így -1 a harmadik sajátérték. Ennél több sajátértéke nem is lehet, és mindegyik sajátérték egy algebrai multiplicitású, így a hozzájuk tartozó sajátvektorok is csak egydimenziós altereket feszítenek ki. Tehát az összes sajátvektort megkapjuk a felsorolt három vektor nem nulla skalárszorosaként.