1. *Határozzuk meg a következő függvénysorok értelmezési tartományát és konvergenciatartományát!*

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z+3)^n}$ *d)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n$

Megoldás: a) Az értelmezési tartománya $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{x}\right|=\left|1+\frac{1}{x}\right|<1$, ha $-1<1+\frac{1}{x}<1$, azaz $x<-\frac{1}{2}$, tehát a $(-\infty,-\frac{1}{2})$ intervallumon abszolút konvergens a függvénysor, $x>-\frac{1}{2}$ esetén pedig $\left|1+\frac{1}{x}\right|>1$, ezért ott divergens. $x=-\frac{1}{2}$-ben $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergens, mert a tagok nem tartanak 0-hoz. Így a konvergenciatartomány $K=(-\infty,-\frac{1}{2})$.

b) Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ha $x>0$, akkor a sor a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonikus sor, ami divergens. Ha $x<0$, akkor a sor $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n$, ami konvergens, mert Leibniz-sor. Tehát a konvergenciatartomány $(-\infty,0)$.

c) Az értelmezési tartomány $\mathbb{C}\setminus\{-3\}$ (a z változó utal arra, hogy komplex függvénysorról van szó).

A hányadoskritériummal: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!(x+3)^{n+1}}}{\frac{1}{n!(z+3)^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)|z+3|}\to 0<1$ minden $z\neq-3$-ra, tehát a függvénysor a teljes értelmezési tartományán abszolút konvergens: $K=\mathbb{C}\setminus\{-3\}$.

d) Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. A konvergenciatartományt a gyökkritérium segítségével határozzuk meg.

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n\right|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}\cdot\left|\frac{2-x}{2+x}\right|=\frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}}\cdot\left|\frac{2-x}{2+x}\right|\to\left|\frac{2-x}{2+x}\right|,$$

ha $n\to\infty$, tehát a sor abszolút konvergens, ha $\left|\frac{2-x}{2+x}\right|<1$, azaz ha $|2-x|<|2+x|$, vagyis ha x közelebb van 2-höz, mint -2-höz, ez pedig $x>0$ esetén teljesül. A sor divergens, ha $\left|\frac{2-x}{2+x}\right|>1$, azaz, ha $x<0$. A határon, $x=0$-ban a sor $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}$, ami Leibniz-sor, így konvergens. Tehát a konvergenciatartomány $[0,\infty)$.

2. *Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciatartományát!*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^2}x^n$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$ *d)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$

Megoldás: a) Gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\frac{|x-1|^n}{n^2\cdot 2^n}}=\frac{|x-1|}{(\sqrt[n]{n})^2\cdot 2}\to\frac{|x-1|}{2}<1,$$

ha $|x-1| < 2$, azaz $x \in (-1,3)$, tehát itt abszolút konvergens (a hatványsor konvergencia-középpontja 1, a konvergenciasugara 2). A konvergenciaintervallum határain: 3-ban a sor $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens ($\sum \frac{1}{n^p}$ konvergens, ha $p > 1$), és -1-ben $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ abszolút konvergens, tehát szintén konvergens. Tehát a konvergenciatartomány $[-1,3]$.

b) A hányadoskritériummal:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{n!|x|^n}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \to \infty,$$ ha $x \neq 0$, 0-ban viszont nyilván konvergens a hatványsor, tehát a konvergenciatartomány $\{0\}$.

c) A gyökkritériumot használjuk: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)|x| = |x|$, tehát $|x| < 1$ esetén a sor abszolút konvergens. A határokon: $\sum\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n$, illetve $\sum\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ mindegyike divergens, mert a sor tagjai nem tartanak 0-hoz: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$. Tehát a konvergenciatartomány $K = (-1,1)$.

d)

3. *Adjuk meg a következő hatványsorok összegfüggvényét!*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n (x-1)^n$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$ *d)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+ni)(iz)^n$

Megoldás: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = f(x) \Rightarrow f(x)x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow (f(x)x)' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' =$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f(x)x = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + C$, és 0-ban $0 \Rightarrow f(x)x =$ $-\ln(1-x) \Rightarrow f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n (x-1)^n = (x-1) \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot n(x-1)^{n-1} = (x-1)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n (x-1)^n\right)' =$ $(x-1)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2x-2)^n\right)' = (x-1)\left(\frac{1}{3-2x}\right)' = \frac{2(x-1)}{(3-2x)^2}$, ha $|2x-2| < 1$, azaz ha $|x-1| < \frac{1}{2}$.

c) Ha $f(x)$ az összeg, akkor $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (3^n + 2^n)(x+1)^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 3(3x+3)^{n-1} +$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2(2x+2)^{n-1} = \frac{3}{1-(3x+3)} + \frac{2}{1-(2x+2)} = \frac{3}{-2-3x} + \frac{2}{-1-2x}$, ahol a mindkét mértani sor konvergens, azaz $|x+1| < \frac{1}{3}$, vagyis $x \in (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ esetén. Itt $f(x) =$ $\int \frac{3}{-2-3x} + \frac{2}{-1-2x}\,dx = -\ln(-2-3x) - \ln(-1-2x) + C$, és az $x = -1$ behelyettesítéséből kapjuk, hogy $C = 0$, vagyis a sor összegfüggvénye $-\ln(2+3x)(1+2x)$ $(x \in (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}))$.

d) Ez felbontható egy mértani sor és egy $\sum nx^n$ típusú sor összegére. Az utóbbi összege

$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$, ha $|x| <$ 1. Ebből $\sum_{n=0}^{\infty}(1+ni)(iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n + i\sum_{n=0}^{\infty} n(iz)^n = \frac{1}{1-iz} + i\frac{(iz)}{(1-iz)^2} = \frac{1-iz-z}{(1-iz)^2}$, ha $|iz| < 1$, azaz $|z| < 1$.

4. *Adjuk meg a következő függvények 0 körüli Taylor-sorát!*

a) $\frac{1}{x+1}$ *b)* xe^x *c)* $\sqrt[3]{1+x}$ *c)* $\cos^2 x$ *d)* $\operatorname{arctg} x$ *f)* $\frac{x}{2-x}$

Megoldás: a) Kiszámíthatjuk a Taylor-sor képlete szerint is: $f(x) = (x+1)^{-1}$-re $f^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)(x+1)^{-n-1}$, ami 0-ban $(-1)^n n!$, így a Taylor-sor $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$; vagy észrevehetjük, hogy $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)}$ egy $-x$ hányadosú mértani sor összege (ha $|x| < 1$), így 0 körüli sorfejtése $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.

b) Mivel $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ minden x-re, az xe^x függvény 0 körüli sorfejtése

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n.$$

c) $f(x) = (1+x)^{1/3}$-nak is könnyen kiszámíthatjuk az n-edik deriváltját:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}, \quad f^{(n)} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-4}{3}\right)(x+1)^{-(3n-1)/3} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot(3n-4)}{3^n}(x+1)^{-(3n-1)/3} \quad (n \geq 2)$$

így a 0 körüli Taylor-sor $1 + \frac{1}{3}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot(3n-4)}{3^n n!}x^n$.

d) Érdemes a $\cos^2 x$ függvényt linearizálni, és arra használni a $\cos x$-re ismert sorfejtést:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

e) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ a mértani sor összegképlete alapján, így az arctg függvényt megkapjuk ennek a tagonkénti integrálásával (ahol a konstans tag 0, mert $\operatorname{arctg} 0 = 0$):

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

f) $\frac{x}{2-x} = \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n.$

5. *Adjuk meg az $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ függvény 0 és 1 körüli Taylor-sorát!*

Megoldás: A polinom $1 + 3x - 3x^2 + 4x^3$ alakja egy 0 körüli hatványsor, így csak ez lehet a 0 körüli Taylor-sora. A harmadfokú polinom negyedik deriváltja már 0, ezért az 1 körüli Taylor-sorhoz csak az ennél alacsonyabb rendű deriváltakat kell kiszámolni:

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \qquad f'(x) = 12x^2 - 6x + 3 \qquad f''(x) = 24x - 6 \qquad f'''(x) = 24$$

$$f(1) = 5 \qquad f'(1) = 9 \qquad f''(1) = 18 \qquad f'''(1) = 24$$

Tehát $f(x)$ Taylor-sora $f(x) = 5 + 9(x-1) + 9(x-1)^2 + 4(x-1)^3$.

6. *Alkalmasan választott hatványsor segítségével számítsuk ki az alábbi számsorok összegét!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Megoldás: a) $\dfrac{n}{(n+1)!}$ az $\dfrac{1}{(n+1)!}x^n$ deriváltjában az x^{n-1} együtthatója, vagyis a derivált értéke 1-ben, és így a keresett sorösszeg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n$ összegfüggvényének deriváltja az $x = 1$ helyen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^x - 1}{x},$$

ennek a deriváltja $\dfrac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2}$, ami 1-ben 1-et vesz föl, így ez a feladatban szereplő számsor összege.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2)^n$ az e^x Taylor-sora az $x = -2$ helyen, tehát a sorösszeg e^{-2}.

c) A 4.e) feladat megoldásából láthatjuk, hogy ez éppen az $\operatorname{arctg} x$ függvény értéke az $x = 1$, helyen, azaz $\frac{\pi}{4}$.

7. *Számítsuk ki a következő periodikus függvények Fourier-sorát!*

a) $f(x) = x$ *a* $(-1, 1]$ *intervallumon, és* f *periódusa* 2

b) $f(x) = |\sin x|$

c) $f(x) = \cos^2 x$

Megoldás: a) $f(x)$ páratlan függvény, ha az egész helyeken fevett értékeket kihagyjuk, és ez nem változtatja a Fourier-sort. Így a Fourier-sorban csak szinuszos tagok vannak: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$. A félperiódus 1, így

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x\, dx = 2\int_{0}^{1} x \sin n\pi x\, dx = \left[-\frac{2x}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\, dx =$$

$$\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_0^1 = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \cdot 2.$$

Így a Fourier-sor

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x.$$

(Érdemes észrevenni, hogy — felhasználva a tényt, hogy a Fourier-sor előállítja a függvényt a folytonossági pontjaiban — $x = \frac{1}{2}$ behelyettesítéssel ebből is kijön a 6.c) feladat megoldása.

b) A félperiódus π, és a függvény páros, így a Fourier-sor $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ alakú.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = \frac{1}{\pi} \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |sinx| \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \cos nx\, dx$$

$$\begin{aligned} I = &\int \sin x \cos nx\, dx = -\cos x \cos nx + \int \cos x(-n \sin nx)\, dx = \\ &= -\cos x \cos nx - \int n \cos x \sin nx\, dx = \\ &= -\cos x \cos nx - n \sin x \sin nx + \int n^2 \sin x \cos nx\, dx = \\ &= -\cos x \cos nx - n \sin x \sin nx + n^2 I \quad \Rightarrow \\ I = &\frac{1}{n^2-1} \cos x \cos nx + \frac{n}{n^2-1} \sin x \sin nx + C \Rightarrow \\ a_n = &\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2-1}(-\cos n\pi - 1) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}, \end{aligned}$$

ami $-\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2-1}$, ha n páros, és 0 különben. Így a Fourier-sor

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4k^2-1} \cos(2kx)$$

c) A linearizálással kapható $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ kifejezés maga is egy Fourier-sor, tehát nem is kell integrálással kiszámítani az együtthatókat.

8. *Számítsuk ki a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *számsor összegét annak a* 2π *periódusú függvénynek a Fourier-sorából, amely a* $(-\pi, \pi]$ *intervallumon* x^2*-tel azonos!*

Megoldás: A függvény páros, folytonos, és fél periódusa π, tehát $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ alakú, ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi} \Big[\frac{1}{3} x^3\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}, \text{ és}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx.$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos nx \, dx =& \frac{1}{n}x^2 \sin nx - \int \frac{2}{n} x \sin nx \, dx = \\ =& \frac{1}{n}x^2 \sin nx + \frac{2}{n^2} x \cos nx - \int \frac{2}{n^2} \cos nx \, dx = \\ =& \frac{1}{n}x^2 \sin nx + \frac{2}{n^2} x \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx + C, \quad \text{tehát}\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{n^2} \pi \cos n\pi = 4 \cdot \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{és így} \quad f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Ebbe $x = 0$-t helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$0 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$