1. *Számítsuk ki az alábbi 2-változós függvények határértékét a megadott helyeken, vagy bizonyítsuk be, hogy a határérték nem létezik!*

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 5}} \dfrac{x^2y}{x-y}$ *b)* $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to \infty}} \dfrac{2xy-1}{y+1}$ *c)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}} x\cos y$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *e)* $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ *f)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$

Megoldás: a) $\frac{2^2\cdot 5}{2-5} = -\frac{20}{3}$.

b) A számláló és a nevező is végtelenhez tart, ezért kiemeljük mindegyikből a (leggyorsabban) végtelenhez tartó tagot, és egyszerűsítünk. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to \infty}} \dfrac{2xy-1}{y+1} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to \infty}} \dfrac{2xy}{y}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2xy}}{1+\frac{1}{y}} = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to \infty}} 2x\cdot\dfrac{1-\frac{1}{2xy}}{1+\frac{1}{y}} = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{1} = 6.$

c) Bár $\cos y$ nem konvergens a végtelenben, a korlátossága miatt használhatjuk a rendőrelvet: $-|x| \le x\cos y \le |x|$, és $x\to 0$ esetén a kisebb és a nagyobb függvény is 0-hoz tart, így a középső is.

d) A határérték nem létezik, mert pl. az $y = x$ görbén tartva $(0,0)$-hoz, a limesz $\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{2x^2} = 0$, az $y=0$ görbén tartva $(0,0)$-hoz pedig $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$.

e) $x^2-xy+y^2 \ge xy$, ugyanis $x^2-xy+y^2-xy = (x-y)^2 \ge 0$. Így $x,y>0$-ra $0 \le \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$, és a rendőr-elv miatt ebből $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$.

f) A függvénynek nincs limesze $(0,0)$-ban, mert különböző görbék mentén tartva $(0,0)$-hoz, különböző limeszeket kaphatunk. Pl. $y=0$-ra $\dfrac{xy^2}{x^3+y^3} = 0 \to 0$, de $y=x$-re $x\to 0$ esetén $y\to 0$, és a függvény értéke ezen a görbén $\dfrac{x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$ nyilván $\dfrac{1}{2}$-hez tart a 0-ban.

2. *Hol folytonos az* $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ *függvény? Adjuk meg az értékét az* $\mathbb{R}^2\setminus D(f)$ *halmazon úgy, hogy* f *a lehető legtöbb helyen folytonossá váljon!*

Megoldás: A függvény folytonos ott, ahol értelmezve van, tehát az $x\ne 0$ helyeken, mert folytonos függvényekből kompozíció és alapműveletek segítségével állítottuk elő. Másrészt $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy}y = y_0$, tehát a függvény definícióját úgy kell kiterjeszteni, hogy $f(0,y) = y$ legyen. A függvény így mindenütt folytonos lesz, mert $(0,y_0)$-ban $\{(x,y)\,|\,x\ne 0\}$-n és $\{(0,y)\,|\,y\in\mathbb{R}\}$-en is y_0-hoz tart.

3. *Határozzuk meg az alábbi függvények gradiensét a megadott pontokban, és iránymenti deriváltját az adott pontban a megadott vektor irányában!*

a) $f(x,y) = xe^{xy}$, $P_0(2,0)$, $\mathbf{a} = (4,3)$

b) $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+y)}{x^2+y}$, $P_0(0,\pi)$

c) $f(x,y,z) = x^2+xyz-\sqrt{x^2+y^2}$, $P_0(1,0,2)$, $\mathbf{a} = (2,1,-2)$

Megoldás: a) $f_x = e^{xy}+xye^{xy}$, $f_y = x^2e^{xy}$, $\nabla f(2,0) = (1,4)$, az $\mathbf{a}$ irányú egységvektor $\mathbf{e_a} = \left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$, az iránymenti derivált $(1,4)\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = \frac{16}{5}$.

b) $f_x = \dfrac{-\sin(x+y)(x^2+y) - \cos(x+y)\cdot 2x}{(x^2+y)^2}$, $f_y = \dfrac{-\sin(x+y)(x^2+y) - \cos(x+y)}{(x^2+y)^2}$,
$\nabla f(0,\pi) = \left(0, \dfrac{1}{\pi^2}\right)$

c) $f_x = 2x + yz - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = xz - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_z = xy$, $\nabla f(1,0,2) = (1,2,0)$. Az $\mathbf{a}$ vektor irányába mutató egységvektor $\mathbf{e_a} = \frac{1}{3}(2,1,-2)$, így az $\mathbf{a}$ irányú iránymenti derivált $\nabla f(1,0,2)\mathbf{e_a} = \frac{4}{3}$.

4. *Keressük meg az alábbi felületek érintősíkját a megadott pontokban!*
a) $x^2+y^2+z^2 = 3$, $P_0(1,1,1)$
b) $x^2+y^2-2xy-x+3y-z = -4$, $P_0(1,2,3)$

Megoldás: a) A felület a $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ függvény szinthalmaza, így a felület normálvektora g gradiense: $\nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z)$, $\nabla g(1,1,1) = (2,2,2)\,||\,(1,1,1)$. Az érintősík $x+y+z=3$.

b) $g = x^2+y^2-2xy-x+3y-z$-re $\nabla g(x,y,z) = (2x-2y-1, 2y-2x+3, -1)$, $\nabla g(1,2,3) = (-3,5,-1)$, az érintősík: $-3(x-1)+5(y-2)-(z-3) = 0$, azaz $-3x+5y-z = 4$.

5. *Adjuk meg az* $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *függvény lineáris közelítését* $P_0(1,2,2)$ *pontban! Használjuk ezt a* $\sqrt{1,1^2+1,8^2+2,1^2}$ *függvényérték közelítő kiszámításához!*

Megoldás: $\nabla f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$,
$\nabla f(1,2,2) = (\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$, $f(x,y,z) \approx f(P_0) + \nabla f(P_0)(x-x_0, y-y_0, z-z_0) =$
$3 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-2) + \frac{2}{3}(z-2)$, ha (x,y,z) közel van $(1,2,2)$-höz.
Így $\sqrt{1,1^2+1,8^2+2,1^2} \approx 3 + \frac{1}{3}\cdot 0,1 - \frac{2}{3}\cdot 0,2 + \frac{2}{3}\cdot 0,1 \approx 2,97$.

6. *Az* $f(x,y)$ *függvényre* $f_x(2,1) = 1$ *és* $f_y(2,1) = -1$, *továbbá* $f(2,1) = 1$. *Számítsuk ki az alábbi parciális deriváltakat a lánc-szabály segítségével:*
a) $f(u+e^{u-1}, u)$ *deriváltja* u *szerint* $u=1$*-nél;*
b) $\sqrt{1+f^2(x,y)}$ *parciális deriváltja* x, *illetve* y *szerint az* $(x,y) = (2,1)$ *helyen;*
c) $f(u^2+v, 2v^2+u)$ *parciális deriváltja az* u *szerint az* $(u,v) = (-1,1)$ *helyen!*

Megoldás: a) $u=1$ esetén $u+e^{u-1} = 2$, és $u=1$, tehát a láncszabályban az f függvény $(2,1)$-beli deriváltjait használhatjuk: $\frac{d}{du}f(u+e^{u-1},u) = 1\cdot(1+e^{u-1}) + (-1)\cdot 1|_{u=1} = 1$.

b) $\sqrt{1+f^2(x,y)} = g(f(x,y))$, ahol $g(u) = \sqrt{1+u^2}$. Mivel $g'(u) = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$,
$\dfrac{\partial}{\partial x} g(f(x,y)) = g'(f(x,y))\cdot f_x(x,y) = g'(f(2,1))\cdot f_x(2,1) = g'(1)\cdot 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ és
$\dfrac{\partial}{\partial y} g(f(x,y)) = g'(f(x,y))\cdot f_y(x,y) = g'(f(2,1))\cdot f_y(2,1) = g'(1)\cdot(-1) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
az $(x,y) = (2,1)$ helyen.

c) $\dfrac{\partial}{\partial u} f(u^2+v, 2v^2+u) = f_x(u^2+v, 2v^2+u)\cdot 2u + f_y(u^2+v, 2v^2+u)\cdot 1 = f_x(2,1)\cdot(-2) +$
$f_y(2,1)\cdot 1 = -3$ és $\dfrac{\partial}{\partial v} f(u^2+v, 2v^2+u) = f_x(u^2+v, 2v^2+u)\cdot 1 + f_y(u^2+v, 2v^2+u)\cdot 4v =$
$f_x(2,1)\cdot 1 + f_y(2,1)\cdot 4 = -3$ az $(u,v) = (-1,1)$ helyen.

7. *Hol vannak lokális szélsőértékei az alábbi függvényeknek?*
a) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

b) $f(x,y) = x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{8}{y}$

c) $f(x,y) = xy + 2x - \ln x^2 y$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z$

e) $yz - 2x + 3z - (x^2 + y^2 + z^2)$

f) $x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{16}{z}$

Megoldás:

a) $f_x = 3x^2 + 3y = 0$, $f_y = 3x + 3y^2 = 0 \Rightarrow y = -x^2$ és $3x + 3x^4 = 3x(1 + x^3) = 0$, tehát $x = 0$ vagy $x = -1$, ami a $(0,0)$ és $(-1,-1)$ kritikus pontokat adja. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{vmatrix}$, ami $(0,0)$-ban -9, ezért ott nyeregpont van, $(-1,-1)$-ben pedig $27 > 0$, míg $f_{xx} = -6 < 0$, tehát itt lokális maximum van.

b) $f_x = 1 - \dfrac{y}{x^2} = 0$, $f_y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{y^2} = 0$ megoldása: $(x,y) = (2,4)$. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y/x^3 & -1/x^2 \\ -1/x^2 & 16/y^3 \end{vmatrix}$, és ez $(2,4)$-ben $\begin{vmatrix} 1 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{vmatrix} = 3/16 > 0$, és $f_{xx}(2,4) = 1 > 0$, tehát f-nek a $(2,4)$ pontban lokális minimuma van.

c) $f_x = y + 2 - 2/x = 0$, $f_y = x - 1/y = 0$ megoldása $(x,y) = (\frac{1}{2}, 2)$. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/x^2 & 1 \\ 1 & 1/y^2 \end{vmatrix}$, és ez $(\frac{1}{2}, 2)$-ben $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{vmatrix} = 1 > 0$, és $f_{xx}(\frac{1}{2}, 2) = 8 > 0$, tehát f-nek lokális minimuma van $(\frac{1}{2}, 2)$-ben.

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z$-re $\nabla f = (2x+2,\ 2y+2,\ 2z-6) = \mathbf{0}$, ha $(x,y,z) = (-1,-1,3)$. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, amelynek a főminorjai $2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ és a teljes determináns $8 > 0$, tehát a $(-1,-1,3)$ pontban az f függvénynek lokális minimuma van.

e) $f(x,y,z) = yz - 2x + 3z - (x^2 + y^2 + z^2)$-re $\nabla f = (-2 - 2x,\ z - 2y,\ y + 3 - 2z) = \mathbf{0}$, ha $(x,y,z) = (-1,1,2)$. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, amelynek főminorjai $-2 < 0$, $4 > 0$ és $-6 < 0$, tehát f-nek a $(-1,1,2)$ pontban lokális maximuma van.

f)

$$f_x = 1 - \frac{y}{x^2}, \qquad f_y = \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}, \qquad f_z = \frac{1}{y} - \frac{16}{z^2},$$

tehát a gradiens akkor 0, ha $y = x^2$, $z = y^2/x = x^3$, és $y = z^2/16$-ból $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = 0$, vagyis ± 2 lehet ($x = 0$-ban nincs értelmezve a függvény), és ebből a kritikus pontok $P_1(2,4,8)$ és $P_2(-2,4,-8)$.

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y/x^3 & -1/x^2 & 0 \\ -1/x^2 & 2z/y^3 & -1/y^2 \\ 0 & -1/y^2 & 32/z^3 \end{vmatrix},$$

ami P_1-ben és P_2-ben

$$\begin{vmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & -1/16 \\ 0 & -1/16 & 1/16 \end{vmatrix} \qquad \text{és} \qquad \begin{vmatrix} -1 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & -1/16 \\ 0 & -1/16 & -1/16 \end{vmatrix}.$$

Az elsőnél a sarokaldeterminánsok rendre $D_1 = 1$, $D_2 = 3/16$ és $D_3 = 1/128$ mind pozitívak, ezért P_1-ben lokális minimum van, amelynek értéke $f(2,4,8) = 8$, a másodiknál $D_1 = -1$, $D_2 = 3/16$, és $D_3 = -1/128$, amelyeknek az előjelei minusszal kezdve váltakozók, így P_2-ben lokális maximum van $f(-2,4,-8) = -8$ értékkel.

8. *Határozzuk meg az f függvény abszolút maximumát és minimumát a T tartományon, ahol*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3$, *$T$ a $(0,0), (9,0), (0,9)$ pontok által meghatározott zárt háromszögtartomány;*

b) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y$, $T = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \le 2,\ y \ge 2x\}$;

c) $f(x,y) = 6xy - 4x^3 - 3x^2$, $T = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$;

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, $T = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$;

e) $f(x,y,z) = 2x - 2y + z$, $T = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le z \le 4\}$.

Megoldás: a) $\nabla f = (2x-2, 2y-2) = (0,0)$, ha $(x,y) = (1,1)$, és a $P_0(1,1)$ pont benne van a háromszög belsejében, ezért ez egy lehetséges szélsőértékpont (és más belső pontban nem is lehet a függvénynek szélsőértéke).

A határoló görbék az $y = 0$, $x = 0$ és $x + y = 9$.

Az $y = 0$-n $f(x,y) = f(x,0) = x^2 - 2x - 3$, így a $g(x) := x^2 - 2x - 3$ kritikus pontjait kell megkeresnünk a $(0,9)$ intervallum belsejében. $g'(x) = 2x - 2 = 0$, ha $x = 1$, így $P_1(1,0)$ lehetséges szélsőértékhely.

Az $x = 0$-n $h(y) := f(0,y) = y^2 - 2y - 3$, amelynek kritikus pontja $y = 1$, tehát $P_2(0,1)$ is jelölt.

Végül az $y = 9 - x$ $(0 < x < 9)$ szakaszon $k(x) := f(x, 9-x) = x^2 + (9-x)^2 - 2x - 2(9-x) - 3$, és $k'(x) = 2x - 2(9-x) = 0$, ha $x = \frac{9}{2}$, amiből a $P_3\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$ pontot kapjuk.

Az abszolút szélsőértékhely ezeken kívül lehet a csúcsok valamelyikében is: $A(0,0)$, $B(9,0)$, $C(0,9)$ A függvényértékeket összehasonlítva: $f(P_0) = -5$, $f(P_1) = f(P_2) = -4$, $f(P_3) = \frac{39}{2}$, $f(A) = -3$, $f(B) = f(C) = 60$. Tehát az abszolút maximum 60, amelyet a függvény a B, C pontokban vesz fel, az abszolút minimum pedig -5, amelyet P_0-ban vesz fel.

b) $\nabla f(x,y) = (4x-4, 2y-4) = \mathbf{0}$, a $P_1(1,2) \in T$, amely csúcspontja a tartománynak. A T tartomány határai $x = 0$, $y = 2$, és $y = 2x$. Az $x = 0$ határvonalon $g(y) := y^2 - 4y$, $g'(y) = 2y - 4 = 0$ a $P_2(0,2)$ ponton, amely a tartománynak csúcspontja. Az $y = 2$ határvonalon $h(x) := 2x^2 - 4x - 4$, $h'(x) = 4x - 4 = 0$ az $(1,2)$ ponton, amely már szerepelt. Az $y = 2x$ határvonalon $k(x) = f(x, 2x) = 6x^2 - 12x$, $k'(x) = 12x - 12 = 0$, az $(1,2)$ ponton, ez megint nem ad új kritikus pontot. Így a kritikus pontok csak a csúcspontok: $(1,2)$, $(0,2)$ és $(0,0)$, a függvényérték ezeken -6, -4 és 0, tehát a minimum -6, amelyet az $(1,2)$ pontban, a maximum 0, amelyet a $(0,0)$ pontban vesz fel a függvény.

c) $\nabla f(x,y) = (6y - 12x^2 - 6x,\ 6x) = \mathbf{0}$, a $(0,0)$ pontban, amely a tartománynak csúcspontja. A határvonalak az $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ és $y = 1$ egyenesek megfelelő szakaszai, és ezeken a $(0,y)$ $(0 < y < 1)$ és $(\frac{1}{2}, 1)$ kritikus pontokat találjuk. A csúcspontokkal együtt a $(0,y)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1,1)$ pontokon kell összehasonlítanunk a függvény értékeit, és ezek az értékek: 0, -7, $\frac{7}{4}$, -1, tehát a minimum -7 (az $(1,0)$ pontban), a maximum pedig $\frac{7}{4}$ az $(\frac{1}{2}, 0)$ pontban.

d) $\nabla f = (2x + y, 2y + x) = 0$, ha $x = -2y = 4x$, azaz $(0, 0)$-ban. Ezen kívül még a határoló körvonalon lehet szélsőérték. Ezt érdemes polárkoordinátákkal paraméterezni: $(\cos t, \sin t)$.
$g(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \cos t \sin t = 1 + \frac{1}{2} \sin 2t$, $g'(t) = \cos 2t = 0$, ha $2t = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, azaz $t = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$. Ez négy különböző pontot ad a körön: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Összehasonlítva a függvényértékeket azt kapjuk, hogy a maximum $\frac{3}{2}$, amelyet f a $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$-ben vesz fel, a minimum pedig 0, amelyet az origóban vesz fel.

e) A függvény gradiense sehol nem 0, így a tartomány belsejében nincs kritikus pont. A határoló felületek a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és a $z = 4$ sík. Az elsőre megszorítva a függvényt: $g(x, y) := f(x, y, x^2+y^2) = 2x-2y+x^2+y^2$ gradiense $(2+2x,\ -2+2y) = \mathbf{0}$ a $(-1, 1, 2)$ pontban, amely a felületdarab belsejébe esik. A másodikra megszorítva: $h(x, y) = 2x-2y+4$ gradiense sehol nem 0, így itt nem kapunk kritikus pontot. Végül a két felület $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4$ egyenletű határvonalán a $k(t) = f(2\cos t, 2\sin t, 4) = 4\cos t - 4\sin t + 4$ függvényre $k'(t) = -4\sin t - 4\cos t = 0$, ha $\operatorname{tg} t = -1$, azaz $t = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, és ez a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$ és $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4)$ kritikus pontokat adja. A három kritikus ponton a függvény értéke -2, $-4\sqrt{2} + 4$, illetve $4\sqrt{2} + 4$, tehát a minimum -2 a $(-1, 1, 2)$ pontban, a maximum pedig $4\sqrt{2} + 4$ a $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4)$ pontban.