1. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixműveletek közül végezzük el azokat, amelyek értelmezve vannak!

$$A+A,\quad A+B,\quad AB,\quad AC,\quad AC+2C,\quad AD-3D,\quad D^2,\quad CC^T,\quad BC,\quad CB.$$

2. Igazak-e minden $n \times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?

a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$;

b) $(A+I_n)(A-I_n) = A^2 - I_n^2$;

c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

d) $(AB)^T = A^T B^T$.

3. Egy mátrixot szimmetrikusnak nevezünk, ha $A^T = A$. Az 1. feladat mátrixai között van-e szimmetrikus? Bizonyítsuk be, hogy AA^T mindig szimmetrikus mátrix!

4. Határozzuk meg a következő mátrixok rangját! (A mátrix rangja az oszlopterének és egyúttal a sorterének a dimenziója, ami megegyezik a lépcsős alakjában a nem nulla sorok számával.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

6. Használjunk elemi sor- vagy oszlopműveleteket a determinánsok egyszerűsítéséhez, és így számítsuk ki a következő $n \times n$-es mátrixok determinánsát!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

7. Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?

8. A $V(a_1, \dots, a_n)$ Vandermonde-mátrix az az $n \times n$-es mátrix, amelynek i. sora $[1\ a_i\ a_i^2\ \dots\ a_i^{n-1}]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Bizonyítsuk be, hogy ennek a mátrixnak a determinánsa $\prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$.