1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Szimultán egyenletrendszerként oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket!

a) $AX = B$

b) $XA = B$ (azaz $A^T X^T = B^T$)

2. Számítsuk ki az alábbi mátrixok közül az invertálhatók inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Számítsuk ki a mátrixok inverzét az aldeterminánsaik segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4. A Cramer-szabály felhasználásával határozzuk meg y értékét az alábbi egyenletrendszerek megoldásában!

a) $\begin{aligned} x \phantom{{}+y} + 2z &= -2 \\ 3x + y + z &= 3 \\ -x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x - y + z &= 2 \\ x + y - 2z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= 9 \end{aligned}$

5. Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban, illetve az a) és h) részben szereplő lineáris transzformációk esetén a megadott $\mathcal{B}$ bázisban is. A transzformációk közül melyikhez van a vektortérnek olyan bázisa, amelyben a transzformáció mátrixa diagonális?

$\mathbb{R}^n$ standard bázisa $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} = \{(1, 0, \dots, 0),\ (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$, a $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ vektortér standard bázisa $\{1, i\}$, a 2×2-es valós mátrixok terének, $\mathbb{R}^{2\times 2}$-nek a standard bázisa pedig $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

a) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$;

b) az $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ vektorral balról való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ben;

c) az $(1, -1, 2)$ vektorral balról való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ben;

d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x, y, z)) = (x + y, x + y)$;

e) a 2×2-es valós mátrixokon a transzponálás;

f) egy adott $a + bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;

g) a sík α szögű elforgatása az origó körül.

h) Az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard bázisban, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (1, -2, 1)\}$

6. Írjuk fel az $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ leképezés mátrixát! Állapítsuk meg a mátrix rangját! Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!