1. Adjuk meg (számolás nélkül) a következő lineáris transzformációk sajátvektorait, sajátértékeit, magterét és képterét:
a) az $x - y - 2z = 0$ síkra való tükrözés $\mathbb{R}^3$-ben;
b) az x tengelyre való $(1,1)$ irányú vetítés $\mathbb{R}^2$-ben;
c) $\mathbf{r} \mapsto (1,2,3) \times \mathbf{r}$ az $\mathbb{R}^3$-ben.

2. Írjuk fel a következő mátrixok karakterisztikus polinomját, majd számítsuk ki a sajátértékeiket és sajátvektoraikat! Melyek diagonalizálhatók $\mathbb{R}$ fölött? És $\mathbb{C}$ fölött?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. a) Írjuk fel az $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ lineáris transzformáció mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban, ha $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, és $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$.
b) Tegyük fel, hogy egy $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixa a fenti $\mathcal{B}$ bázisban $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hogyan hat g a sík vektorain? Mi a standard mátrixa? Mi a $(0,1)$ vektor képe g-nél?

4. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk standard mátrixát. Mik az egyes transzformációk sajátértékei és sajátalterei? Diagonalizálható-e a transzformáció?
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ahol $f : (1,1,0) \mapsto (1,0,1) \mapsto (0,1,1) \mapsto (1,1,0)$.
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ahol $f : (1,2) \mapsto (2,4),\ (-1,3) \mapsto (1,-3)$.
c) $f(x,y,z) = (x+y, y, z)$.

5. Van-e a síkban olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvektora? És a térben? Melyek azok a lineáris transzformációk, amelyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora?

6. Diagonalizálás segítségével számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix n-edik hatványát!

7. Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát: $(1,5,3)$ és $(3,0,-1)$. Ezt felhasználva határozzuk meg A összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt!

8. Bizonyítsuk be, hogy hasonló mátrixoknak megegyezik a determinánsa, a rangja, ugyanaz a karakterisztikus polinomjuk és a sajátértékeik.

9. Melyek hasonlók egymáshoz az alábbi mátrixok közül?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$