1. Számítsuk ki az alábbi 2-változós függvények határértékét a megadott helyeken, vagy bizonyítsuk be, hogy a határérték nem létezik!

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 5}} \dfrac{x^2y}{x-y}$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to \infty}} \dfrac{2xy-1}{y+1}$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}} x\cos y$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ e) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$

2. Hol folytonos az $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x}$ függvény? Adjuk meg az értékét az $\mathbb{R}^2\setminus D(f)$ halmazon úgy, hogy f a lehető legtöbb helyen folytonossá váljon!

3. Határozzuk meg az alábbi függvények gradiensét a megadott pontokban, és iránymenti deriváltját az adott pontban a megadott vektor irányában!

a) $f(x,y)=xe^{xy}$, $P_0(2,0)$, $\mathbf{a}=(4,3)$

b) $f(x,y)=\dfrac{\cos(x+y)}{x^2+y}$, $P_0(0,\pi)$

c) $f(x,y,z)=x^2+xyz-\sqrt{x^2+y^2}$, $P_0(1,0,2)$, $\mathbf{a}=(2,1,-2)$

4. Keressük meg az alábbi felületek érintősíkját a megadott pontokban!

a) $x^2+y^2+z^2=3$, $P_0(1,1,1)$

b) $x^2+y^2-2xy-x+3y-z=-4$, $P_0(1,2,3)$

5. Adjuk meg az $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ függvény lineáris közelítését $P_0(1,2,2)$ pontban! Használjuk ezt a $\sqrt{1,1^2+1,8^2+2,1^2}$ függvényérték közelítő kiszámításához!

6. Az $f(x,y)$ függvényre $f_x(2,1)=1$ és $f_y(2,1)=-1$, továbbá $f(2,1)=1$. Számítsuk ki az alábbi parciális deriváltakat a lánc-szabály segítségével:

a) $f(u+e^{u-1},u)$ deriváltja u szerint $u=1$-nél;

b) $\sqrt{1+f^2(x,y)}$ parciális deriváltja x, illetve y szerint az $(x,y)=(2,1)$ helyen;

c) $f(u^2+v,2v^2+u)$ parciális deriváltja az u szerint az $(u,v)=(-1,1)$ helyen!

7. Hol vannak lokális szélsőértékei az alábbi függvényeknek?

a) $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$

b) $f(x,y)=x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{8}{y}$

c) $f(x,y)=xy+2x-\ln x^2y$

d) $x^2+y^2+z^2+2x+2y-6z$

e) $yz-2x+3z-(x^2+y^2+z^2)$

f) $x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{16}{z}$

8. Határozzuk meg az f függvény abszolút maximumát és minimumát a T tartományon, ahol

a) $f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y-3$, T a $(0,0),(9,0),(0,9)$ pontok által meghatározott zárt háromszögtartomány;

b) $f(x,y)=2x^2+y^2-4x-4y$, $T=\{(x,y)\,|\,x\geq 0,\ y\leq 2,\ y\geq 2x\}$;

c) $f(x,y)=6xy-4x^3-3x^2$, $T=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$;

d) $f(x,y)=x^2+y^2+xy$, $T=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$;

e) $f(x,y,z)=2x-2y+z$, $T=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leq z\leq 4\}$.