Integrálszámítás (ismétlés)

1. $\int \sqrt{x}(x^2 - 3x + 1)\,dx$

Megoldás: A szorzat kifejtésével: $\int x^{5/2} - 3x^{3/2} + x^{1/2}\,dx = \frac{7}{2}x^{7/2} - \frac{15}{2}x^{5/2} + \frac{3}{2}x^{3/2} + C.$

2. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$

Megoldás: Az $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ képletet használva: $\int \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} - \frac{1}{2}x + C.$

3. $\int \cos^3 2x\,dx$

Megoldás: $\cos^3 2x = \cos 2x(1 - \sin^2 2x)$ átalakítással és láncszabállyal: $\dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{6}(\sin 2x)^3 + C$

4. $\int (x^2 + 2x)\ln x\,dx$

Megoldás: Parciális integrálással: $(\dfrac{1}{3}x^3 + x^2)\ln x - \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + C$

5. $\int\limits_1^2 \ln\dfrac{x^3}{x+1}\,dx$

Megoldás: $\ln\dfrac{x^3}{x+1} = 3\ln x - \ln(x+1)$ felbontással, és parciális integrálással:

$$[3x\ln x - (x+1)\ln(x+1) - 2x]_1^2 = 8\ln 2 - 3\ln 3 - 2.$$

6. $\int\limits_1^2 (2x-3)^{100}\,dx$

Megoldás: $\left[\dfrac{1}{101}\cdot\dfrac{1}{2}(2x-3)^{101}\right]_1^2 = \dfrac{1}{101}$

7. $\int \dfrac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 1}\,dx$

Megoldás: Maradékos osztás után a számláló szétbontásával: $\dfrac{1}{2}x^2 + \ln(x^2+1) - 5\operatorname{arctg} x + C$

8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}\,dx$

Megoldás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel a gyök alatt: $\operatorname{arsh}(\dfrac{1}{2}x - 1) + C$

9. $\int \dfrac{\ln x}{x}\,dx$

Megoldás: Láncszabállyal: $\dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$

10. $\int \ln^2 x\,dx$

Megoldás: Kétszeres parciális integrálással: $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$

11. $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$

Megoldás: $u = x^2$ helyettesítéssel, majd parciális integrálással (az improprius integrál kiértékelésénél L'Hospital-szabállyal): $\lim\limits_{b\to\infty} -\dfrac{1}{2}b^2 e^{-b^2} - \dfrac{1}{2}e^{-b^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

12. $\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$

Megoldás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel, majd $x+1 = \operatorname{ch} u$, helyettesítéssel $\int \operatorname{sh}^2 u\,du$, és itt linearizálás után integrálva $\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\operatorname{arch}(x+1) + C$

13. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Megoldás: Az $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \operatorname{arctg} x$ felbontás szerint parciálisan integrálva:

$\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \operatorname{arsh} x + C$

14. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$

Megoldás: Az integrandust elemi törtekre bontva: $\int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{2}\cdot \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{2(x-2)} + C$

15. $\int\limits_1^2 \frac{2x^3}{x^2+5}\,dx$

Megoldás: Maradékos osztás után: $\int\limits_1^2 2x - 5\cdot\frac{2x}{x^2+5} = [x^2 - 5\ln(x^2+5)]_1^2 = 3 - 5\ln\frac{3}{2}$

16. $\int \frac{1}{x^4+x^2}\,dx$

Megoldás: Elemi törtekre bontással: $-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$

17. $\int \frac{5x+3}{x^2-4x+5}\,dx$

Megoldás: A számláló szétbontásával:

$$\int \frac{\frac{5}{2}(2x-4)+13}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{5}{2}\ln(x^2-4x+5) + 13\operatorname{arctg}(x-2) + C$$

18. $\int \frac{x^3-2x+2}{x^2(x^2-2x+2)}\,dx$

Megoldás: A függvényt $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$ alakban írhatjuk, ahol közös nevezőre hozás és a számláló rendezése után az együtthatókra a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ -2A + B + D &= 0 \\ 2A - 2B &= -2 \\ 2B &= 2. \end{aligned}$$

Így az integrál $\int \frac{1}{x^2} + + \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + C.$