1. *Félcsoportot alkotnak-e*

a) $\mathbb{R}^3$ *vektorai a vektoriális szorzásra nézve;*

b) $\mathbb{R}^2$ *vektorai a skalárszorzásra nézve;*

c) $\mathbb{R}^2$ *vektorai az* $(a,b)*(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ *szorzásra nézve?*

Megoldás: a) Nem, a vektoriális szorzás nem asszociatív, pl. $(\mathbf{i}\times\mathbf{i})\times\mathbf{j} = \mathbf{0}\times\mathbf{j} = \mathbf{0}$, de $\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) = \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

b) Nem, mert vektorok skalárszorzata nem vektor.

c) Igen:

$$\big((a,b)*(c,d)\big)*(e,f) = (ac-bd,\ ad+bc)*(e,f) =$$
$$= (ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce) \text{ és}$$
$$(a,b)*\big((c,d)*(e,f)\big) = (a,b)*(ce-df,\ cf+de) =$$
$$= (ace-adf-bcf-bde,\ acf+ade+bce-bdf)$$

egyenlők, tehát a szorzás asszociatív. (Mellesleg ez a komplex számok szorzása, ahol az $a+bi$ helyett az ezt a számot a síkon reprezentáló (a,b) számpár áll.)

2. *Vektortér-e*

a) a valós polinomok halmaza, $\mathbb{R}[x]$ *az* $\mathbb{R}$ *test fölött;*

b) $\mathbb{C}$ *az* $\mathbb{R}$ *fölött;*

c) $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{Z}_2$ *(azaz a kételemű* $\{0,1\}$ *test) fölött?*

Altér-e

d) a legfeljebb n*-edfokú valós polinomok halmazaz* $\mathbb{R}[x]$*-ben;*

e) a pontosan n*-edfokú valós polinomok halmaza* $\mathbb{R}[x]$*-ben;*

f) a két tengely uniója $\mathbb{R}^2$*-ben;*

g) az első síknegyed $\mathbb{R}^2$*-ben?*

Megoldás: a) Igen, könnyen ellenőrizhető, hogy a polinomok összeadása és skalárral (azaz konstanssal) szorzása kielégíti a vektortér axiómáit.

b) Igen, a $\mathbb{C}$ test tulajdonságaiból következik, hogy az összes vektortéraxióma is teljesül.

c) A $\mathbb{Z}_2$ test műveletei $0+0=1+1=0$, $1+0=0+1=1$, $0\cdot 0 = 0\cdot 1 = 1\cdot 0 = 0$, $1\cdot 1 = 1$ (a testaxiómák könnyen ellenőrizhetők). Ha $\mathbb{R}$ vektortér lenne $\mathbb{Z}_2$ fölött, akkor a skalárral való szorzás csak az $1\cdot a = a$ és $0\cdot a = 0$ lehetne tetszőleges $a\in\mathbb{R}$-re, mert az első szerepel a vektortér-axiómák között, a második pedig egyszerűen következik az axiómákból. De akkor $0 = 0\cdot a = (1+1)\cdot a = 1\cdot a + 1\cdot a = a + a = 2a$ teljesülne, de $2a \neq 0$, ha $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Tehát $\mathbb{R}$ nem lehet vektortér $\mathbb{Z}_2$ fölött.

d) Igen, altér. Nyilván nem üres, és zárt a műveletekre nézve, azaz két legfeljebb n-edfokú polinom összege, és egy ilyen polinom skalárszorosa is legfeljebb n-edfokú (a 0 polinom fokát $-\infty$-nek tekintjük).).

e) Nem altér, mert nem zárt a műveletekre nézve. Például $(x^2+x-2)+(-x^2+2x+1) = 3x-1$ két másodfokú polinom összege, de csak elsőfokú.

f) Nem altér, mert nem zárt az összeadásra nézve (bár a skalárral való szorzásra igen): például $(1,0)$ az x tengelyen, $(0,1)$ az y tengelyen van, de az összegük, $(1,1)$ nincs rajta a két tengely unióján.

g) Nem altér, mert nem zárt a skalárral való szorzásra nézve (bár az összeadásra igen): például $(1,1)$ az első síknegyedben van, de $-1(1,1) = (-1,-1)$ nem.

3. *Kollineárisak-e* $\mathbb{R}^3$*-ben az* $A(1,1,1)$*,* $B(4,1,7)$ *és* $C(5,-1,-1)$ *pontok?*

Megoldás: Nem, mert az $\overrightarrow{AB} = (3,0,6)$ és $\overrightarrow{AC} = (4,-2,-2)$ vektorok nem párhuzamosak.

4. *Elő lehet-e állítani az* $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ *és* $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ *vektorok lineáris kombinációjaként a* $\mathbf{c} = (0, 1, 3)$*, illetve a* $\mathbf{d} = (-1, 1, -5)$ *vektorokat?*

Megoldás: Az **a** és **b** vektorok nem párhuzamosak, így kifeszítenek egy origón átmenő síkot, amelynek normálvektora:

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -2, -1).$$

Egy vektor akkor és csak akkor állítható elő **a** és **b** lineáris kombinációjaként, ha benne van a síkban, azaz merőleges **n**-re. Mivel $\mathbf{nc} = -5 \neq 0$, de $\mathbf{nd} = 0$, a **c** vektor nem áll elő, a **d** vektor igen.

Ha meg akarjuk adni **d** előállítását, az $x(1, 2, -1) + y(1, 1, 1) = (-1, 1, -5)$ egyenletet, azaz az $x + y = -1$, $2x + y = 1$, $-x + y = -5$ egyenletrendszert kell megoldanunk, amelynek megoldása $x = 2$, $y = -3$. Tehát $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

5. *Legyen az OAB háromszög két oldalvektora* $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ *és* $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$*, ahol O az origó. Állítsuk elő a következő pontok helyvektorait az* **a** *és* **b** *lineáris kombinációjaként:*
a) OA felezőpontja;
b) AB felezőpontja;
c) a háromszög súlypontja;
d) az AB szakaszt negyedelő pontok.

Megoldás: a) $\frac{1}{2}\mathbf{a}$
b) Ha AB felezőpontja F, akkor $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
c) $\frac{2}{3}\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
d) $\mathbf{a} + \frac{1}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{3}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$, és
$\mathbf{a} + \frac{3}{4}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$.

6. *Tegyük fel, hogy* $\{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \,\}$ *bázisa egy V valós vektortérnek. Döntsük el, hogy az alábbiak független rendszert, generátorrendszert, bázist alkotnak-e V-ben!*

a) $\{\, \mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2{+}\mathbf{b}_3 \,\}$ *b)* $\{\, \mathbf{b}_1{+}\mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_1{-}\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2{+}2\mathbf{b}_3 \,\}$ *c)* $\{\, \mathbf{b}_1{+}\mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_2{+}\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_3{+}\mathbf{b}_1 \,\}$

Megoldás: a) Független, mert ha $x\mathbf{b}_1 + y(\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) = \mathbf{0}$, akkor $x\mathbf{b}_1 + y\mathbf{b}_2 + y\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$, így a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ vektorok függetlensége miatt $x = y = 0$. Generátorrendszer nem lehet, mert akkor bázis is lenne, és minden bázisnak ugyanannyi eleme van.

b) Nem lehet független, mert akkor kiegészíthető lenne egy legalább 4 elemű bázissá. Generátorrendszer, mert ha az általuk generált altér U, akkor $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_1 \in U \Rightarrow \mathbf{b}_2 = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) - \mathbf{b}_1 \in U$, és $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_1 \in U \Rightarrow \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3) \in U$, akkor viszont $\{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \,\}$ minden lineáris kombinációja benne van U-ban, tehát a teljes V vektortér is.

c) A b) részhez hasonló módon belátjuk, hogy a három vektor által generált altérben benne van $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ is. A három vektor összege $2\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3 \in U \Rightarrow \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \in U$, és ha ebből levonjuk külön-külön a három megadott vektort, akkor azt kapjuk, hogy $\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_1 \in U$. Tehát $\{\, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_1 \,\}$ generátorrendszer, és egy háromelemű generátorrendszer egy 3-dimenziós térben szükségképpen független (különben lenne kisebb elemszámú generátorrendszer, és végső soron bázis is), így ez a generátorrendszer bázis.

7. *Milyen alakzat a következő síkok metszete? Számítsuk is ki a metszetet, ahol nem üres!*

a) $2x - y + z = 3, \quad x + y = 2, \quad -x + 3y - 2z = -2$

b) $2x - y + z = 3, \quad x + y = 2$

c) $x + y + z = 1, \quad x + 2y + 3z = -2, \quad 3x + y - z = 3$

Megoldás: a) Az első két sík nem párhuzamos ($\mathbf{n}_1 = (2, -1, 1)$ és $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 0)$ a normálvektoruk), tehát a metszetük egy egyenes, $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-1, 1, 3)$ irányvektorral. Ez az egyenes nem párhuzamos a harmadik síkkal, ugyanis $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3 = (-1, 1, 3)(-1, 3, -2) = -2 \neq 0$, tehát a három sík metszete egyetlen pont. Az egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy a metszéspont $(1, 1, 2)$.

b) A két sík az a) rész első két síkja, tehát a metszetük egyenes, amelynek az irányvektora $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$, és rajta van az a) részben kiszámított metszéspont, $(1, 1, 2)$. Az egyenes vektoros egyenlete $\mathbf{r} = (1, 1, 2) + t(-1, 1, 3)$, koordinátás egyenletrendszere $x = 1 - t$, $y = 1 + t$, $z = 2 + 3t$.

c) Ennek a három síknak üres a metszete, mert az első egyenletet a másodikból kivonva az $y + 2z = -3$ egyenletet, az első háromszorosát a harmadikból kivonva a $-2y - 4z = 0$, és azt -2-vel leosztva az $y + 2z = 0$ egyenletet kapjuk, tehát ellentmondásra jutunk.

8. *Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását, vektoros alakban is!*

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ *b)* $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ *c)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *e)* $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Megoldás: a) Lépcsős, de nem redukált (az első sor vezéreleme nem 1). A lépcsős alakból is leolvasható, hogy nincs megoldása az egyenletrendszernek.

b) Redukált lépcsős, a megoldás $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, azaz $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) Nem lépcsős.

d) Redukált lépcsős. Két szabad változója van, x_2 és x_4. Ezeknek tetszőleges $s, t \in \mathbb{R}$ paraméterértéket adva a megoldás $x_1 = 1 - 2t$, $x_2 = s$, $x_3 = 2 - 3t$, $x_4 = t$, azaz

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e) Lépcsős, de nem redukált (a második vezéregyes oszlopában van másik nem nulla elem).

9. *Oldjuk meg azokat a lineáris egyenletrendszereket, amelyeknek a kibővített mátrixa*

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *b)* $\left[\begin{array}{ccc|r} 0 & 1 & 3 & 1+i \\ 1 & 1 & -2i & -2 \\ 1+i & -1 & -4 & -3 \end{array}\right]$ *c)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$

Megoldás:

a) A redukált lépcsős alak: $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, a megoldás: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1+i \\ 1 & 1 & -2i & -2 \\ 1+i & -1 & -4 & -3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2i & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1+i \\ 0 & -2-i & -6+2i & -1+2i \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3-2i & -3-i \\ 0 & 1 & 3 & 1+i \\ 0 & 0 & 5i & 5i \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & -2+i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát a megoldás $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ -2+i \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) A lépcsős alak, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ mutatja, hogy az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.