1. *Adjuk meg az $S:\ 2x - y + z = 1$ sík explicit (paraméteres) egyenletét, illetve egyenletrendszerét! (Oldjuk meg az egyenletet mint egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan!)*

Megoldás: Az egyenlet(rendszer) redukált lépcsős alakja $\left[1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \middle| \quad \frac{1}{2}\right]$, aminek a vektoros megoldása $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, tehát a sík (egy lehetséges) paraméteres egyenletrendszere $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t,\ \ y = s,\ \ z = t.$

2. *Hány megoldása lehet az alábbi lineáris egyenletrendszereknek a valós számok körében, ha a $*$-ok tetszőleges (nem feltétlenül egyenlő) számokat jelölnek?*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c} * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & * & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Megoldás: Az első egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, mert a mátrixának lépcsős alakjában nincs ellentmondásos sor, és van olyan oszlop (az első), amelyben nincs vezérelem, tehát van szabad változó.

A második egyenletrendszer megoldásszáma függ a * értékétől. Ha a * helyén 0 áll, akkor a harmadik sor ellentmondásos, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ha * nem nulla, akkor a lépcsős alakban nincs ellentmondásos sor, de van szabad változó, tehát végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

A harmadik egyenletrendszernek mindenképpen van megoldása, mert homogén. Egyetlen megoldása van, ha az első sor csillaga, és a másik két csillag közül valamelyik nem nulla, az összes többi esetben végtelen sok megoldása van.

A negyedik egyenletrendszernek mindenképpen egyértelmű megoldása van, mert lépcsős alakú, nincs ellentmondásos sor, és minden oszlopban van vezérelem.

3. *Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő valós mátrixokhoz tartozó egyenletrendszereknek?*

a) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 3 & -2 & a & b \\ -3 & -6 & a-b & 2b \end{array}\right]$ *b)* $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & a & 1 \end{array}\right]$

Megoldás: A megoldások számának megállapításához elég lépcsős alakra hozni a mátrixot, nem szükséges a redukált lépcsős alak.

a)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 3 & -2 & a & b \\ -3 & -6 & a-b & 2b \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 0 & -8 & -2a-3b & b \\ 0 & 0 & 4a+2b & 2b \end{array}\right]$$

Ha $4a + 2b \neq 0$, azaz ha $b \neq -2a$, akkor egyértelmű megoldás van.
Ha $b = -2a \neq 0$, akkor nincs megoldás, mert a második mátrixnak van ellentmondásos sora.
Ha $b = -2a$ és $b = 0$, azaz ha $a = b = 0$, akkor is lépcsős alakú a második mátrix, de nincs ellentmondásos sora, és van szabad változója, tehát ekkor végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ -1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 2 & a & | & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 3 & 1 & | & b+3 \\ 0 & 2 & a & | & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3}b+1 \\ 0 & 0 & a-\frac{2}{3} & | & -1-\frac{2}{3}b \end{bmatrix}$$

Egy megoldás van, ha $a \neq \frac{2}{3}$, végtelen sok megoldás van, ha $a = \frac{2}{3}$, és $b = -\frac{3}{2}$, végül nincs megoldás ha $a = \frac{2}{3}$, és $b \neq -\frac{3}{2}$

4. *Lineárisan függetlenek-e az* $(1, 2, -1, 0), (1, 1, 2, 1), (2, 0, 1, 3) \in \mathbb{R}^4$ *vektorok?*

Megoldás: Akkor függetlenek, ha az

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{azaz az} \quad \begin{bmatrix} x & + & y & + & 2z \\ 2x & + & y & & \\ -x & + & 2y & + & z \\ & & y & + & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogén egyenlet(rendszer)nek csak triviális megoldása van. Az együtthatómátrix lépcsős alakja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mutatja, hogy az egyenletrendszernek csak egy megoldása van, tehát a három vektor független.

5. *Állítsuk elő a* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -1, 3)$ *és* $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -2, -1)$ *vektorok lineáris kombinációjaként az* $\mathbf{a} = (0, -1, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$ *és* $\mathbf{c} = (3, 2, -2, 3)$ *vektorok közül azokat, amelyeket lehet!*

Megoldás: Érdemes a három vektor előállítását szimultán egyenletrendszerként kiszámolni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & | & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & | & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mapsto\mapsto\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A három konstansoszlopot külön tekintve leolvashatók a megoldások: $\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{b}$ nem állítható elő, és $\mathbf{c} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

6. *Alteret alkotnak-e* $\mathbb{R}^3$*-ben az alábbi részhalmazok? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát is!*

a) $\{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1 \,\}$
b) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\,\}$
c) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\,\}$
d) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\,\}$
e) $\{(x, y, z) \mid x^3 + y^3 + z^3 = 0\,\}$

Megoldás: a) Nem altér, mert $\mathbf{0}$ nem eleme ennek a részhalmaznak.

b) Altér, ugyanis egy K test fölötti n-változós homogén lineáris egyenlet(rendszer)nek megoldásai mindig alteret alkotnak K^n-ben. A megoldás vektoros alakjában szereplő vektorok bázist alkotnak a megoldástérben. Az egyenlet kibővített mátrixa

$[1 \quad 2 \quad 1 \quad | \quad 0]$ lépcsős mátrix, a megoldás $y = s$, $z = t$, $x = -2s - t$, azaz
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, így az altér bázisa $\{(-2,1,0),\ (-1,0,1)\}$.

c) Nem altér, mert nem tartalmazza a **0**-t.

d) Ez a halmaz csak a $(0,0,0)$ vektorból áll, az pedig nyilván alteret alkot (az önmagával vett összege és tetszőleges skalárszorosa is a **0** vektor). A bázisa az üreshalmaz.

e) Nem altér. Igaz, hogy zárt a skalárral való szorzásra (ha $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, akkor $(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 + (\lambda z)^3 = \lambda^3(x^3 + y^3 + z^3) = \lambda^3 \cdot 0 = 0$), de az összeadásra nem. Pl. $(1,-1,0)$ és $(1,0,-1)$ benne van ebben a halmazban, de $(2,-1,-1)$ nincs.

7. *Vegyük* $\mathbb{R}^3$*-ben a* $\mathcal{B} = \{(1,3,-1),(0,1,1),(2,-1,0)\}$ *bázist. Melyik az a* $\mathbf{v}$ *vektor, amelynek* $\mathcal{B}$ *szerinti koordinátavektora* $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$*, és mi a* $\mathbf{w} = (3,0,-3)$ *vektor koordinátavektora* $\mathcal{B}$ *szerint?*

Megoldás: $\mathbf{v} = 1 \cdot (1,3,-1) + 2 \cdot (0,1,1) - 1 \cdot (2,-1,0) = (-1,6,1)$. $\mathbf{w}$-hez olyan x, y, z számokat kell keresnünk, amelyekre $x \cdot (1,3,-1) + y \cdot (0,1,1) + z \cdot (2,-1,0) = (3,0,-3)$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{w}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

8. *Adjuk meg az alábbi mátrixok sorterének és oszlopterének egy-egy bázisát! Írjuk fel a többi sor-, illetve oszlopvektort ezek lineáris kombinációjaként! Adjuk meg az összes oszlop koordinátavektorát az oszloptér megadott bázisára nézve!*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Megoldás: a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az elemi sorműveletek megváltoztatják a mátrix oszlopterét, de megtartják az oszlopok közti lineáris kapcsolatokat. Legyenek $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ az eredeti mátrix oszlopai, $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \mathbf{v}'_4, \mathbf{v}'_5$ pedig a redukált lépcsős alaké. Ekkor a vezéregyest tartalmazó $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{e}_1$ és $\mathbf{v}'_3 = \mathbf{e}_2$ oszlopok nyilván bázist alkotnak az utóbbi mátrix oszlopterében, és a többi oszlop előállítása is közvetlenül leolvasható a mátrixból: $\mathbf{v}'_2 = 2\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_4 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = -\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_3$, $\mathbf{v}'_5 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_3$. Tehát az eredeti mátrix oszlopterének bázisa

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{és az előállítások:} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_4 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az elemi sorműveletek nem változtatják meg a sorteret, és a redukált lépcsős alak nem nulla sorai lineárisan függetlenek, így bázisát adják a sortérnek. Ebben az esetben ez a bázis $\{(1,2,0,-1,1),\ (0,0,1,1,1)\}$. Mivel a vezéregyesek oszlopaiban csak egy 1-es van, a többi elem 0, a mátrix sorainak a redukált lépcsős alak soraiból való előállításának együtthatóit megadják az adott sorokban a vezéregyesek pozíciójában (jelen esetben az első és harmadik helyen) álló számok:

$$(1,2,0,-1,1) = 1\cdot(1,2,0,-1,1) + 0\cdot(0,0,1,1,1)$$
$$(2,4,1,-1,3) = 2\cdot(1,2,0,-1,1) + 1\cdot(0,0,1,1,1)$$
$$(-1,-2,1,2,0) = -1\cdot(1,2,0,-1,1) + 1\cdot(0,0,1,1,1)$$

Vegyük észre, hogy az oszloptér bázisának meghatározásakor az eredeti oszlopvektorokból választottunk ki egy bázist (azaz egy maximális független rendszert), a soroknál új báziselemeket találtunk.

Az oszlopok fenti előállítása alapján a koordinátavektorok a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ bázis szerint $[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{v}_4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[\mathbf{v}_5]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Ezek közvetlenül is leolvashatók mint a redukált lépcsős alak nemnulla soraiból álló mátrix oszlopai.)

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

redukált lépcsős alak. Ennek alapján az eredeti mátrix 1., 2. és 4. oszlopa bázisát adja az oszlopterének:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{és a 3. oszlop:} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A sortérnek bázisa $\{(1,0,1,0), (0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$, és az eredeti mátrix sorainak előállítása:

$$(1,2,3,1) = (1,0,1,0) + 2(0,1,1,0) + (0,0,0,1),$$
$$(1,-2,-1,0) = (1,0,1,0) - 2(0,1,1,0),$$
$$(0,1,1,-1) = (0,1,1,0) - (0,0,0,1),$$
$$(1,1,2,3) = (1,0,1,0) + (0,1,1,0) + 3(0,0,0,1).$$

Az oszlopvektorok koordinátavektorai $\mathcal{B}$ szerint $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.