1. *Legyen*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = [\,1 \quad 2 \quad 1\,], C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixműveletek közül végezzük el azokat, amelyek értelmezve vannak!

$$A+A, \quad A+B, \quad AB, \quad AC, \quad AC+2C, \quad AD-3D, \quad D^2, \quad CC^T, \quad BC, \quad CB.$$

Megoldás: $A+B$, AB, D^2 nincsenek értelmezve.

$$A+A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad AC = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad AC+2C = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 26 \end{bmatrix} \qquad AD-3D = \begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 10 & 20 \\ 11 & 26 \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad BC = [\,6\,] \qquad CB = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2. *Igazak-e minden $n \times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?*

a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$; *c)* $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
b) $(A+I_n)(A-I_n) = A^2 - I_n^2$; *d)* $(AB)^T = A^T B^T$.

Megoldás: a) Nem igaz, mert $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 + BA - AB$, és általában $AB \neq BA$, pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$-ra és $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$-ra
$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ és $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Igaz: $(A+I)(A-I) = A^2 + IA - AI - I^2 = A^2 + A - A - I^2 = A^2 - I^2$

c) Ugyanúgy nem igaz, mint az a). Ez is azon múlik, hogy általában $AB \neq BA$.

d) Nem igaz, helyesen $(AB)^T = B^T A^T$. Pl. az a) ellenpéldájára
$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (AB)^T$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, és $A^T B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. *Egy mátrixot szimmetrikusnak nevezünk, ha $A^T = A$. Az 1. feladat mátrixai között van-e szimmetrikus? Bizonyítsuk be, hogy AA^T mindig szimmetrikus mátrix!*

Megoldás: Az 1. feladat A mátrixa szimmetrikus.

$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$.

4. *Határozzuk meg a következő mátrixok rangját! (A mátrix rangja az oszlopterének és egyúttal a sorterének a dimenziója, ami megegyezik a lépcsős alakjában a nem nulla sorok számával.)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{r}(A) = 2$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2i & 1+2i\\ 3 & i & 3-i\\ 4i & -3 & -1+4i\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1 & 2i & 1+2i\\ 0 & -5i & -7i\\ 0 & 5 & 7\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1 & 2i & 1+2i\\ 0 & -5i & -7i\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{r}(B)=2$$

A C mátrixról rögtön látszik, hogy a sorai egymás skalárszorosai (és persze az oszlopai is), tehát csak egy független választható ki közülük. Így a C mátrix rangja 1.

5. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat!*

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$ *g)* $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$ *h)* $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$

Megoldás: a) Első sor szerinti kifejtéssel:

$$1\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1(2-12)-2(1-8)-(3-4)=5.$$

b) A sorok lineárisan összefüggők (az első két sor összege a harmadik), ezért a determináns 0. De ki is fejthetjük az első sor szerint:

$$1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}-0+1\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}-0=2-2=0.$$

c) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 1=7.$

d) A második sor szerint kifejtve: $-(-1)\cdot(8-3)-1\cdot(1-4)=8.$

e) Rendre az első sorok szerinti kifejtéssel

$$1\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 2\cdot 2=8.$$

f) Egy elemi sorművelettel elérhető, hogy az utolsó oszlopban csak egy nem nulla elem legyen, és aztán az utolsó oszlop szerint fejtünk ki.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-6.$$

g) Egyszerűsítsük a determinánst úgy, hogy a második és negyedik sorból kiemelünk 2-t, majd a második sorral kinullázzuk a harmadik és negyedik sor első elemét.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}.$$

Ezután a negyedik, majd a harmadik, aztán a második sor szerint kifejtve, a determináns $4\cdot 3\cdot 1\cdot(-1)\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}=144.$

h) Adjuk hozzá az első sorhoz a többi hármat, emeljünk ki 5-öt, és az így kapott első sort vonjuk ki a többiből, így háromszögmátrixot kapunk.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

6. *Használjunk elemi sor- vagy oszlopműveleteket a determinánsok egyszerűsítéséhez, és így számítsuk ki a következő $n \times n$-es mátrixok determinánsát!*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Megoldás: a) $\left[\frac{n}{2}\right]$ sorcserével (az első sort az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, stb. cseréljük fel) az egységmátrixot kapjuk. Így a determináns $(-1)^{[n/2]}$, azaz 1, ha $n = 4k$ vagy $4k+1$, és -1, ha $n = 4k+2$ vagy $4k+3$ alakú.

b) Adjuk hozzá az első sort az összes többihez! Ekkor felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek az átlójában rendre $1, 2, 3, \dots, n$ van, így a determináns $n!$.

c) Ha a második oszlopot kivonjuk az elsőből, majd az így kapott második sort kivonjuk az összes alatta levőből, akkor felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek az átlójában rendre $-1, 2, 1, 2, 3, \dots, n-2$ áll, így a determináns $-2 \cdot (n-2)!$.

7. *Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?*

Megoldás: $|2A^{-1}| = 2^5 \cdot |A^{-1}| = 2^5 \cdot |A|^{-1} = \frac{32}{3}$
$|(2A)^{-1}| = |2A|^{-1} = (2^5 \cdot |A|)^{-1} = 96^{-1} = \frac{1}{96}$.
$|A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}| = |A|^2 \cdot |A^T| \cdot |A^{-1}| = |A|^2 \cdot |A| \cdot |A|^{-1} = |A|^2 = 9.$

8. *A $V(a_1, \dots, a_n)$ Vandermonde-mátrix az az $n \times n$-es mátrix, amelynek i. sora $[1\ a_i\ a_i^2\ \dots\ a_i^{n-1}]$ ($i = 1, 2, , \dots, n$). Bizonyítsuk be, hogy ennek a mátrixnak a determinánsa $\prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$.*

Megoldás: Teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $n = 2$-re $\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$. Tegyük fel, hogy valamely $n-1$-re igaz, tekintsük a $V(a_1, \dots, a_n)$ determinánst. Jobbról balra haladva vonjuk ki minden oszlopból az előző oszlop a_1-szeresét, aztán $i = 2, \dots, n$-re emeljünk ki az i. sorból $(a_i - a_1)$-et. Ezután fejtsük ki a determinánst az első sor szerint.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \dots & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1 a_n & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

A kiemelés után a 2.-tól n. sorokban és oszlopokban a $V(a_2, \dots, a_n)$ Vandermonde-determináns áll, így használhatjuk az indukciós feltevést.

$$= \prod_{1<j} (a_j - a_1) \cdot |V(a_2, \dots, a_n)| = \prod_{1<j\le n} (a_j - a_1) \cdot \prod_{2 \le i < j \le n} (a_j - a_i) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$