1. *Legyen* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *és* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Szimultán egyenletrendszerként oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket!*

a) $AX = B$

b) $XA = B$ *(azaz* $A^T X^T = B^T$*)*

Megoldás: a) Az $AX = B$ egyenlet azt jelenti, hogy ha X oszlopai $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{x}_3$, a B oszlopai pedig $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$, akkor $A\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i$ teljesül $i = 1, 2, 3$-ra.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -4 \end{array}\right] \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \end{array}\right]$ mutatja, hogy az egyenletrendszer ellentmondásos (az első és a harmadik oszlop nem áll elő), tehát nincs ilyen X mátrix.

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & -5 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -7 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{és így } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

2. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok közül az invertálhatók inverzét!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Számítsuk ki az inverzeket szimultán egyenletrendszerként: ha M négyzetes, akkor az $MX = I$ mátrixegyenlet (szimultán egyenletrendszer) megoldása M^{-1}, feltéve, hogy az egyenletrendszer megoldható.

a) $[A|I] = \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] =$
$[I|A^{-1}] \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

b) B nem invertálható, mert nem négyzetes.

c) $[C|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$
$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \mapsto$
$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] = [I|C^{-1}] \quad \Rightarrow \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $[D|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$
$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$
Már ezen a ponton is látszik, hogy ellentmondásos az egyenletrendszer, tehát a D mátrix nem invertálható. Mellesleg ezt a Gauss-elimináció elkezdése előtt is megállapíthatjuk, ha például kiszámítjuk D determinánsát (ami 0), vagy ha észrevesszük, hogy az első és a második sor kétszeresének különbsége a harmadik sort adja, vagyis D sorai lineárisan összefüggők.

3. *Számítsuk ki a mátrixok inverzét az aldeterminánsaik segítségével!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: a) $|A| = 4$, $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, így $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $|B| = 1 \cdot (-2-1) + 2 \cdot (3+1) = 5$, és $\operatorname{adj} B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow$

$B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

d) $|D| = 2 \cdot (-1-3) - 1 \cdot 1 = -9$, $\operatorname{adj} D = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}^T \Rightarrow$

$D^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

4. *A Cramer-szabály felhasználásával határozzuk meg y értékét az alábbi egyenletrendszerek megoldásában!*

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & -2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 9 \end{array}$$

Megoldás: a)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-7-10+12}{-3+8} = -1.$$

Mellesleg észrevehetjük, hogy az együtthatómátrix éppen a 3. feladat B mátrixa, amelynek ott kiszámoltuk az inverzét, tehát az egyenletrendszer megoldása abból is kijön: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{54}{27} = 2.$$

5. *Adjuk meg a következő lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban, illetve az a) és h) részben szereplő lineáris transzformációk esetén a megadott $\mathcal{B}$ bázisban is. A transzformációk közül melyikhez van a vektortérnek olyan bázisa, amelyben a transzformáció mátrixa diagonális?*
$\mathbb{R}^n$ standard bázisa $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} = \{(1,0,\dots,0),\ (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$, a $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ vektortér standard bázisa $\{1, i\}$, a 2×2-es valós mátrixok terének, $\mathbb{R}^{2\times 2}$-nek a standard bázisa pedig $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

- *a) az $y = x$ egyenesre való tükrözés, $\mathcal{B} = \{(1,0), (1,1)\}$;*
- *b) az $\mathbf{i} = (1,0,0)$ vektorral balról való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ben;*
- *c) az $(1,-1,2)$ vektorral balról való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ben;*
- *d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ahol $\varphi((x,y,z)) = (x+y, x+y)$;*
- *e) a 2×2-es valós mátrixokon a transzponálás;*
- *f) egy adott $a+bi$ komplex számmal való szorzás a $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortéren;*
- *g) a sík α szögű elforgatása az origó körül.*
- *h) Az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard bázisban, $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (2,1,0), (1,-2,1)\}$*

Megoldás: a) $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, így a standard bázisban a transzformáció mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. A $\mathcal{B}$ bázis elemeinek képe, és a képek koordinátavektora $\mathcal{B}$ szerint:

$\mathbf{b}_1 = (1,0) \mapsto (0,1) = (-1)\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1) \;\Rightarrow [f(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{b}_2 = (1,1) \mapsto (1,1) = 0\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1) \;\Rightarrow [f(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Így $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{j}$, így a standard mátrix oszlopai rendre az $\mathbf{0}$, $\mathbf{k}$ és $-\mathbf{j}$ koordinátavektorai, azaz a mátrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Ebben az esetben érdemesebb kiszámolni a vektoriális szorzatot egy általános (x,y,z) vektorra. $(1,-1,2)\times(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-z-2y,\ 2x-z,\ y+x)$, tehát az A standard mátrixra

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y-z \\ 2x-z \\ x+y \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Ha A a standard mátrix, akkor

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

e) Mivel $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, a transzformáció standard A mátrixának hatása a koordinátavektorokon:

$$A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

f) $(x+yi)(a+bi) = (ax-by) + i(bx+ay)$, tehát a standard A mátrixra $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{bmatrix}$, amiből leolvasható, hogy $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

g) Az α szögű forgatást komplex szorzással a legkönnyebb kiszámolni: $(x+yi)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = x\cos\alpha - y\sin\alpha + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha)$. Ha a komplex számokat $\mathbb{R}^2$ vektorainak tekintjük, azt kapjuk, hogy $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ képe a forgatásnál $\begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix}$. Így a mátrix $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

h) Bár koordinátageometriai módszerekkel is kiszámíthatjuk egy általános (x_0, y_0, z_0) képét a vetítésnél, és ebből felírhatjuk a vetítés standard mátrixát, most lineáris algebrai módszert alkalmazunk. Keresünk három olyan független vektort, amelynek a képét könnyű meghatározni. Ilyenek a sík vektorai, mert azok önmagukba mennek (választhatunk közülük két függetlent), és a sík normálvektora, ami viszont $\mathbf{0}$-ba megy.

Tehát legyenek $\mathbf{b}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 2)$ és $\mathbf{b}_3 = (1, -2, 1)$. Ezek képe rendre $\mathbf{c}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{c}_2 = (0, 1, 2)$ és $\mathbf{c}_3 = (0, 0, 0)$. Legyenek a B mátrix oszlopai a $\mathbf{b}_i$ vektorok (oszlopvektorként írva), a C mátrix oszlopai pedig a $\mathbf{c}_i$ vektorok. Ekkor B invertálható, mert az oszlopai $\mathbb{R}^3$-ben bázist alkotnak, és a vetítés standard mátrixa az az A mátrix, amelyre $AB = C$. Ezt megoldhatjuk szimultán egyenletrendszerként ($B^T X = C^T$) az ismeretlen $X = A^T$-ra, vagy B invertálásával: $A = CB^{-1}$. Alkalmazzuk most az utóbbit:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

A megadott $\mathcal{B}$ is pont olyan tulajdonságú, mint amit előbb a standard mátrix kiszámításához használtunk: az első két vektor párhuzamos a síkkal, a harmadik merőleges rá. Tehát az első két bázisvektor képe önmaga (így a kép koordinátavektora $\mathbf{e}_1$, illetve $\mathbf{e}_2$), míg a harmadik vektor képe $\mathbf{0}$. Tehát a transzformáció mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Az utolsó kérdésre térve: a mátrix akkor diagonális egy bázisban, ha minden bázisvektor önmaga skalárszorosába megy, azaz egy önmagával párhuzamos vektorba (beleértve a $\mathbf{0}$ vektort is). Az a)-beli tükrözésnél és a h)-beli vetítésnél nyilván van ilyen bázis, sőt, a h)-ban pont ilyen a megadott $\mathcal{B}$ bázis, az a)-ban pedig $\{(1, 1), (-1, 1)\}$ megfelelő. A $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ vektoriális szorzás esetén a kapott vektor merőleges $\mathbf{v}$-re, tehát csak akkor lehet $\mathbf{v}$-vel párhuzamos, ha $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, azaz ha $\mathbf{v} = t\mathbf{a}$ valamely $t \in \mathbb{R}$-re. Így a b)-ben és c)-ben nem találunk megfelelő bázist. Az e)-ben a szimmetrikus ($A^T = A$) és ferdén szimmetrikus ($A^T = -A$) mátrixokis ilyenek, és ezekből van is elegendő: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ megfelelő bázis: ebben a mátrix diagonális, amelyben a diagonális elemek rendre $1, 1, 1 - 1$. Az f)-ben pontosan az a kérdés, hogy lehet-e $z \neq 0$-a $(a + bi)z = \lambda z$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re, és az nyilván csak $a + bi \in \mathbb{R}$, azaz $b = 0$ esetén lehet. Akkor viszont már a standard mátrix is diagonális. Végül az elforgatás csak akkor vihet egy vektort önmagával párhuzamosba, ha 0 vagy π szöggel forgatunk, és akkor is diagonális a standard mátrix.

6. *Írjuk fel az $f : (x, y, z) \longmapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ leképezés mátrixát! Állapítsuk meg a mátrix rangját! Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!*

Megoldás: Legyen A a leképezés standard mátrixa, és hozzuk A-t elemi sorműveletekkel redukált lépcsős alakra!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből leolvasható, hogy a mátrix rangja 2 (a lépcsős alaknak két nem nulla sora van), ami megegyezik a képtér, azaz a mátrix oszlopterének dimenziójával, és a magtér dimenziója a dimenziótétel szerint $3 - 2 = 1$. A képtérnek bázisát adják az A mátrixnak azok az oszlopai, amelyek helyén a redukált lépcsős alakban vezéregyest tartalmazó oszlop áll, azaz $\operatorname{Im} f$ bázisa $\{(1, 1, 2, -1),\ (1, 0, 1, 0)\}$, a magtér pedig az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldástere. A megoldás vektoros alakja $t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, így a magtér bázisa $\{(-1, 3, 1)\}$.