1. *Adjuk meg (számolás nélkül) a következő lineáris transzformációk sajátvektorait, sajátértékeit, magterét és képterét:*

a) az $x - y - 2z = 0$ síkra való tükrözés $\mathbb{R}^3$-ben;

b) az x tengelyre való $(1, 1)$ irányú vetítés $\mathbb{R}^2$-ben;

c) $\mathbf{r} \mapsto (1, 2, 3) \times \mathbf{r}$ az $\mathbb{R}^3$-ben.

Megoldás: a) Sajátvektorok a sík normálvektorai -1 sajátértékkel, a síkkal párhuzamos nem nulla vektorok 1 sajátértékkel. A magtér $\{\,\mathbf{0}\,\}$, a képtér $\mathbb{R}^3$.

b) Sajátvektorok az $(1, 1)$ nem nulla skalárszorosai 0 sajátértékkel, az x tengely nem nulla vektorai 1 sajátértékkel. A magteret az $(1, 1)$, a képteret az $(1, 0)$ vektor generálja.

c) Mivel $(1, 2, 3) \times \mathbf{r}$ merőleges $\mathbf{r}$-re, csak úgy lehet egyúttal párhuzamos is vele, ha $(1, 2, 3) \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$, azaz ha $\mathbf{r}$ bárhuzamos az $(1, 2, 3)$ vektorral. Vagyis a sajátvektorok $t(1, 2, 3)$, ahol $0 \neq t \in \mathbb{R}$. A magtér az $(1, 2, 3)$ vektor által generált altér, a képtér az erre merőleges $x + 2y + 3z = 0$ sík.

2. *Írjuk fel a következő mátrixok karakterisztikus polinomját, majd számítsuk ki a sajátértékeiket és sajátvektoraikat! Melyek diagonalizálhatók $\mathbb{R}$ fölött? És $\mathbb{C}$ fölött?*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: $|A - xI| = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, 3$. Az 1-hez tartozó sajátvektorok az $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, azaz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer nemtriviális megoldásai: $t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$. A 3-hoz tartozó sajátvektorok pedig az $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, azaz $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer nem $\mathbf{0}$ megoldásai: $t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$. Mivel a 2×2-es mátrixnak van két független valós sajátvektora, diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött, és a diagonális alakja $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$|B - xI| = x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm i$. Tehát B-nek valós mátrixként nincs sajátértéke, így sajátvektora sem, ezért nem diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött. Viszont $\mathbb{C}$-ben van két különböző sajátértéke, így $\mathbb{C}$ fölött diagonalizálható.

C háromszögmátrix, így a sajátértékei leolvashatók az átlójából: 3 és 5. A mátrix 2×2-es, két különböző valós sajátértékkel, így szükségképpen diagonalizálható. (A sajátvektorai $\lambda_1 = 3$-hoz $(-2, 9)$, $\lambda_2 = 5$-höz pedig $(0, 1)$ nem nulla skalárszorosai.)

$|D - xI| = (1 - x)(x^2 - 2x) = -x(x - 1)(x - 2)$. Mivel a mátrix háromszor hármas, és van három különböző valós sajátértéke, ezekhez pedig tartozik három független sajátvektor, D diagonalizálható is. A sajátvektorok az alábbi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ nem nulla skalárszorosai, és D diagonális alakja a $P = [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3]$ mátrixsszal való konjugált, $P^{-1}DP$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}DP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$|E - xI| = -x^3 + 2x^2 - x = -x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$. A 0-hoz tartozó sajátvektorok $t \cdot (1, -1, 1)$, és az 1-hez tartozók $t \cdot (1, 0, 1)$, ahol $t \neq 0$. Mivel ezek közül csak két független választható ki, az E mátrix nem diagonalizálható sem $\mathbb{R}$, sem $\mathbb{C}$ fölött.

3. *a) Írjuk fel az $f : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ lineáris transzformáció mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban, ha $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, és $\mathcal{B} = \{(1,2), (1,1)\}$.*

b) Tegyük fel, hogy egy $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixa a fenti $\mathcal{B}$ bázisban $[g]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Hogyan hat g a sík vektorain? Mi a standard mátrixa? Mi a $(0,1)$ vektor képe g-nél?

Megoldás: a) Az áttérés mátrixa a $\mathcal{B}$ bázis elemeiből mint oszlopokból álló $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix, így $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$.

b) A transzformáció az $(1,2)$ vektort önmagába, az $(1,1)$ vektort $\mathbf{0}$-ba viszi, így egy tetszőleges $a(1,2) + b(1,1)$ vektort $a(1,2)$-be visz, azaz a vektor végpontján átmenő, $(1,1)$-gyel párhuzamos egyenesnek az $y = 2x$ egyenesel vett metszéspontjába. Ez az $y = 2x$ egyenesre való $(1,1)$ vektor irányú vetítés. Ha A a standard bázis, akkor $[g]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$, tehát $A = P[g]_{\mathcal{B}}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

4. *Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk standard mátrixát. Mik az egyes transzformációk sajátértékei és sajátalterei? Diagonalizálható-e a transzformáció?*

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ahol $f : (1,1,0) \mapsto (1,0,1) \mapsto (0,1,1) \mapsto (1,1,0)$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ahol $f : (1,2) \mapsto (2,4)$, $(-1,3) \mapsto (1,-3)$.

c) $f(x,y,z) = (x+y, y, z)$.

Megoldás: a) Könnyen leolvasható, hogy f mátrixa a $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ bázisban

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha P az áttérési mátrix, akkor f standard mátrixa

$$A = P[f]_{\mathcal{B}}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom $-x^3 + 1$, amelynek egyetlen valós gyöke az 1, tehát ez az egyetlen sajátérték. A hozzá tartozó sajátvektorokat megkapjuk az $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásaiként:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$-nek nincs az f sajátvektoraiból álló bázisa, így f nem diagonalizálható.
(Mellesleg a standard mátrixból leolvasható $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{k} \mapsto \mathbf{j} \mapsto \mathbf{i}$ hatásból látszik, hogy a

transzformáció az első síknyolcadban levő, origó csúcsú egységkocka 120°-os forgatása az origóból kiinduló testátló, azaz az origón átmenő, $(1,1,1)$ irányvektorú egyenes körül.)

b) A megadott hatás mutatja, hogy $(1,2)$ és $(-1,3)$ sajátvektorok 2, illetve -1 sajátértékkel. Így a transzformáció diagonalizálható, sőt a $\mathcal{B} = \{(1,2),(-1,3)\}$ bázisban a mátrixa diagonális: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ebből a standard mátrix is könnyen kiszámítható:
$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 18 & 1 \end{bmatrix}.$

c) A standard mátrix az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

háromszögmátrix, így a sajátértékei leolvashatók a főátlójából. 1 az egyetlen sajátérték, viszont $r(A-I) = 1$ miatt az $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldástere csak két dimenziós, tehát a transzformáció nem diagonalizálható. Az 1-hez tartozó sajátaltér $\{(s,0,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$, a sajátvektorok ennek a nem nulla elemei.

5. *Van-e a síkban olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvektora? És a térben? Melyek azok a lineáris transzformációk, amelyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora?*

Megoldás: Igen, például az origó körüli 90°-os forgatásnak nincs sajátvektora.

A térben viszont minden lineáris transzformációnak van sajátvektora. Ugyanis a karakterisztikus polinom harmadfokú, tehát feltétlenül van valós gyöke (egy harmadfokú polinom olyan folytonos függvény, amely a $-\infty$-ben $-\infty$-hez, $+\infty$-ben $+\infty$-hez tart — vagy fordítva —, így valahol felveszi a 0-t).

Ha minden nem nulla vektor sajátvektor, akkor csak egy sajátérték lehet, ugyanis ha $\lambda \neq \mu$ különböző sajátértékek, és $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ hozzájuk tartozó sajátvektorok, akkor $\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}$ függetlenek, tehát $f(\mathbf{v}+\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{u} \neq \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{u}$ semelyik α skalárra, így ekkor $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ nem lenne sajátvektor. Ha λ az egyetlen sajátérték, és minden nemnulla vektor λ-hoz tartozó sajátvektor, akkor f a λ-val való szorzás, és mátrixa (bármely bázisban) λI.

6. *Diagonalizálás segítségével számítsuk ki az* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrix* n*-edik hatványát!*

Megoldás: A 2. feladatban kiszámolt sajátvektorokkal, a $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ áttérési mátrixszal $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, ahol $P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Így

$$A^n = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+3^n}{2} & \frac{-1+3^n}{2} \\ \frac{-1+3^n}{2} & \frac{1+3^n}{2} \end{bmatrix}.$$

7. *Az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *szimmetrikus mátrixnak ismerjük két független sajátvektorát:* $(1,5,3)$ *és* $(3,0,-1)$. *Ezt felhasználva határozzuk meg* A *összes sajátvektorát a hozzájuk tartozó sajátértékekkel együtt!*

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

így ehhez a két vektorhoz tartozó sajátértékek a 6 és az 1. Mivel A szimmetrikus, létezik a sajátvektoraiból álló ortogonális bázis $\mathbb{R}^3$-ben, sőt bármely, sajátvektorokból álló ortogonális rendszert ki lehet egészíteni ilyenné. Ebben az esetben mindkét vektorra merőleges vektor csak a vektoriális szorzatuk skalárszorosa lehet. $(1, 5, 3) \times (3, 0, -1) = (-5, 10, -15)$, vagy a skalárszorosa, $(1, -2, 3)$ lehet a harmadik sajátvektor. Ezt az A mátrix $(-1, 2, -3)$-ba, azaz a -1-szeresébe viszi, így -1 a harmadik sajátérték. Ennél több sajátértéke nem is lehet, és 1-nél nagyobb dimenziós sem lehet semelyik sajátaltér, mert akkor $\mathbb{R}^3$-ben háromnál több független sajátvektort is találnánk. Tehát a sajátvektorok csak az $(1, 5, 3)$, $(3, 0, -1)$ és $(1, -2, 3)$ vektorok nemnulla skalárszorosai.

8. *Bizonyítsuk be, hogy hasonló mátrixoknak megegyezik a determinánsa, a rangja, ugyanaz a karakterisztikus polinomjuk és a sajátértékeik.*

Megoldás: Tegyük fel, hogy A hasonló B-hez, azaz van olyan P invertálható, amelyre $P^{-1}AP = B$. Ekkor $|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = |P|^{-1} \cdot |A| \cdot |P| = |A|$, és ugyanezt alkalmazhatjuk a $k_B(x) = |B - xI|$ determinánsra is: $|B - xI| = |P^{-1}AP - xI| = P^{-1}AP - xP^{-1}IP| = |P^{-1}(A - xI)P| = |A - xI|$, tehát a karakterisztikus polinomok is megegyeznek, és így azok gyökei, a sajátértékek is.

9. *Melyek hasonlók egymáshoz az alábbi mátrixok közül?*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A determinánsok közül az első és a negyedik, illetve a második és a hatodik egyezik meg. De az első mátrix karakterisztikus polinomja $x^2 - x$, a negyediké pedig $x^2 - 2x$, tehát legfeljebb a második és a hatodik mátrix lehet hasonló a 8. feladat szerint. Ezek pontosan akkor hasonlók, ha a hatodik mátrix is diagonalizálható, és a sajátértékei 1 és 2. Ez pedig valóban igaz: a hatodik mátrix karakterisztikus polinomja $(x - 2)(x - 1)$, s mivel a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok mindig lineárisan függetlenek, létezik ezekből álló bázis (első helyre tegyük az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektort), és erre a bázisra áttérve pontosan a második mátrixot kapjuk.