1. *Döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi számsorok, és ha igen, akkor határozzuk meg az összegüket!*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$ *b)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ *e)* $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ *f)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2i)^n}{3^{n+2}}$

Megoldás:

a) Divergens, mert még azt a szükséges feltételt sem elégíti ki, hogy a tagok 0-hoz tartsanak: $\frac{n-1}{n+1}=\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to 1$.

b) Ez két konvergens mértani sor összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{2}{6}}+\frac{1}{1-\frac{3}{6}}=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$$

c) A sor tagjait $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ különbségként írhatjuk, és így az egymás utáni tagok kiejtik egymást (teleszkópos összeget kapunk). Az N. részletösszeg:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)=1-\frac{1}{N+1}\to 1,$$

ha $N\to\infty$, tehát a sor konvergens, és az összege 1.

d) A c) feladathoz hasonlóan ez is teleszkópos összeg, mégsem konvergens:

$$S_N=\left(-\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\cdots+\left(-\sqrt{N}+\sqrt{N+1}\right)=-1+\sqrt{N+1}\to\infty,$$

ha $N\to\infty$.

e) Az $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$ átalakításból látszik, hogy a sor teleszkópos. A tagok ugyan tartanak 0-hoz ($\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln 1=0$), de a részletösszeg N-ig

$\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(N+1)-\ln 1=\ln(N+1)$ végtelenhez tart, így a sor divergens.

f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+2i)^n}{3^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{1+2i}{3}\right)^n=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+2i}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2-2i}=\frac{1}{12}(1+i)=$ $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}i$, ugyanis $\left|\frac{1+2i}{3}\right|=\frac{\sqrt{5}}{3}<1$, tehát a sor konvergens, és alkalmazható a mértani sor összegképlete.

2. *Konvergensek-e a következő számsorok?*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ *d)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-2n+1}{2n^2+n+2}$

Megoldás: a) A majoránskritérium alapján konvergens, ugyanis $0 < \dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{n^2}$, és tudjuk, hogy $\sum \dfrac{1}{n^p}$ konvergens, ha $p > 1$.

b) A sor pozitív tagú, és

$$\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1} = \frac{(n^4+1)-(n^4-1)}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}} < \frac{2}{\sqrt{n^4+0}} = \frac{2}{n^2},$$

továbbá $\sum \dfrac{1}{n^2}$ konvergens, így a majoráns kritérium miatt a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$ sor is konvergens.

c) Ez a sor nagyságrendben a $\sum \dfrac{1}{n}$ divergens sorhoz hasonlítható, tehát azt szeretnénk belátni a minoránskritériummal, hogy ez is divergens. $\dfrac{n^2}{n^3+1} > \dfrac{n^2}{n^3+n^3} = \dfrac{1}{2n}$, és $\sum \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{n}$ divergens, így a feladatban szereplő sor is az.

d) Ennek a sornak a tagjai nem tartanak 0-hoz, ugyanis

$$\frac{n^3-2n+1}{2n^2+n+2} = \frac{n^3(1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})} = n \cdot \frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} \to \infty,$$

tehát a sor divergens.

3. *Döntsük el, hogy konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi számsorok!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$

Megoldás: a) A gyökkritériumot használjuk. $\sqrt[n]{\left(\dfrac{n+2}{2n}\right)^n} = \dfrac{n+2}{2n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \to \dfrac{1}{2} < 1$, így a sor konvergens.

b) A hányadoskritériummal:

$$\frac{(n+1)!/(2^{n+1}+1)}{n!/(2^n+1)} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = (n+1)\frac{2^n(1+2^{-n})}{2^{n+1}(1+2^{-n-1})} =$$

$$= \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1+2^{-n}}{1+2^{-n-1}} \to \infty > 1,$$

így a sor divergens.

c) Itt megint a gyökkritériumot érdemes használni.

$$\sqrt[n]{\frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1\cdot 1^2}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

így a sor konvergens.

d) $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n\ln n} < \frac{1}{n}$, és a $\sum \frac{1}{n^p}$ sorokra nem használható a gyök- vagy a hányadoskritérium (mindkettőnél 1 lesz a limesz), ezért ennél a sornál is a pontosabb integrálkritériummal próbálkozunk.

$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ nemnegatív, monoton fogyó, és ∞-ben 0-hoz tart, ezért $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ akkor és csak akkor konvergens, ha az $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ improprius integrál konvergens.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^{\infty} (\ln x)^{-1}(\ln x)'\,dx = \lim_{b\to\infty} \Big[\ln\ln x\Big]_2^b = \lim_{b\to\infty} \ln\ln b - \ln\ln 2 = \infty,$$

tehát a sor divergens.

e) A sor nem abszolút konvergens, mert $\frac{n}{n^2+1} > \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$, és $\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ divergens. Viszont Leibniz-sor, ugyanis váltakozó előjelűek a tagjai, $\frac{n}{n^2+1} \to 0$, és abszolút értékben monoton fogyók a tagok: $\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$, mert $(n+1)(n^2+1) = n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n = n((n+1)^2+1)$. Tehát a sor konvergens, de nem abszolút konvergens, vagyis a sor feltételesen konvergens.

f) Annak eldöntéséhez, hogy a sor abszolút konvergens-e, a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ sor konvergenciáját kell megvizsgálnunk. Ezt a hányados- vagy gyökkritérium nem dönti el (a hányadosnak és az n-edik gyöknek a limesze is 1), tehát az integrálkritériumot használjuk. Az $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ függvény a $[2,\infty)$ intervallumon nemnegatív, monoton fogyó és nullához tartó, továbbá $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$.
Tehát az integrál konvergens, és így a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ sor is az. Ez azt jelenti, hogy az eredeti sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens is.

4. *Határozzuk meg a következő függvénysorok értelmezési tartományát és konvergenciatartományát!*

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z+3)^n}$ *d)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n$

Megoldás: a) Az értelmezési tartománya $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{x}\right| = \left|1+\frac{1}{x}\right| < 1$, ha $-1 < 1+\frac{1}{x} < 1$, azaz $x < -\frac{1}{2}$, tehát a $(-\infty,-\frac{1}{2})$ intervallumon abszolút konvergens a függvénysor, és divergens, ha $x > -\frac{1}{2}$. Az $x = -\frac{1}{2}$ pontban $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergens, mert a tagok nem tartanak 0-hoz.
Így a konvergenciatartomány $K = (-\infty,-\frac{1}{2})$.

b) Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ha $x < 0$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, és ez konvergens, mert Leibniz-sor. Ha $x > 0$, akkor a sor a $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor, amelyről tudjuk, hogy divergens. Tehát a konvergenciatartomány $(-\infty, 0)$.

c) Az értelmezési tartomány $\mathbb{C} \setminus \{ -3 \}$ (a z változó utal arra, hogy komplex függvénysorról van szó).

A hányadoskritériummal: $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{\frac{1}{(n+1)!(z+3)^{n+1}}}{\frac{1}{n!(z+3)^n}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)|z+3|} \to 0 < 1$ minden $z \neq -3$-ra, tehát a függvénysor a teljes értelmezési tartományán abszolút konvergens: $K = \mathbb{C} \setminus \{ -3 \}$.

d) $\sqrt[n]{\left| \dfrac{(-1)^n}{n-1} \left(\dfrac{2-x}{2+x} \right)^n \right|} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \left| \dfrac{2-x}{2+x} \right| = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}(1-1/n)^{1/n}} \left| \dfrac{2-x}{2+x} \right| \to \left| \dfrac{2-x}{2+x} \right| < 1,$ ha $|2-x| < |2+x|$, azaz ha $4+x^2-4x = (2-x)^2 < (2+x)^2 = 4+x^2+4x$, ami $x > 0$-ra teljesül, és $\left| \dfrac{2-x}{2+x} \right| > 1$, ha $x < 0$. Tehát a sor abszolút konvergens a $(0, \infty)$ intervallumon. Az $x = 0$ pontban a sor $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n-1}$ Leibniz-sor, így a konvergenciatartomány $[0, \infty)$.

5. *Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciatartományát!*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$ *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(n+1)^2} x^n$ *c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n x^n$ *d)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n + 2^n}{n} (x+1)^n$

Megoldás: a) Gyökkritériummal: $\sqrt[n]{\left| \dfrac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n} \right|} = \dfrac{|x-1|}{2(\sqrt[n]{n})^2} \to \dfrac{|x-1|}{2}$. Tehát a hatványsor abszolút konvergens, ha $|x-1| < 2$, azaz $x \in (-1, 3)$, és divergens, ha $|x-1| > 2$. Az $x = 3$ pontban a sor $\sum \frac{1}{n^2}$, amelyről tudjuk, hogy konvergens ($\sum \frac{1}{n^p}$ alakú, ahol $p > 1$), az $x = -1$ pontban pedig $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$, ami az előző miatt abszolút konvergens. Tehát a konvergenciatartomány $[-1, 3]$.

b) A hányadoskritériummal:
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{n!|x|^n}{(n+1)^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)|x| \cdot \left(\dfrac{n+1}{n+2} \right)^2 \to \infty$, ha $x \neq 0$, 0-ban viszont nyilván konvergens a hatványsor, tehát a konvergenciatartomány $\{ 0 \}$.

c) A gyökkritériumot használjuk: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n x^n \right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) |x| = |x|$, tehát $|x| < 1$ esetén a sor abszolút konvergens. A határokon: $\sum\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n$, illetve $\sum\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ mindegyike divergens, mert a sor tagjai nem tartanak 0-hoz: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n} \right)^{-1} = e^{-1}$. Tehát a konvergenciatartomány $K = (-1, 1)$.

d) A gyökkritériummal:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n\right|} = \frac{3\sqrt[n]{1+(2/3)^n}}{\sqrt[n]{n}}|x+1| \to 3|x+1| < 1,\text{ ha } |x+1| < \frac{1}{3}.$$

Tehát a sor konvergenciaközéppontja -1, sugara $\frac{1}{3}$, és a határokon: $x = -\frac{2}{3}$-ban a sor $\sum \frac{1+(2/3)^n}{n} > \sum \frac{1}{n}$, így divergens, $x = -\frac{4}{3}$-ban a sor $\sum(-1)^n \frac{1+(2/3)^n}{n}$, ami Leibniz-sor (a tagok váltakozó előjelűek, nullához tartanak, és abszolút értékben monoton fogyók), így konvergens. Tehát a konvergenciatartomány $[-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

6. *Adjuk meg a következő hatványsorok összegfüggvényét!*

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^n(x-1)^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+ni)(iz)^n$

Megoldás:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ha $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, akkor $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, tehát $f(x) = \displaystyle\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + C$. Az $x = 0$ érték behelyettesítésével azt kapjuk, hogy $C = 0$, így $f(x) = -\ln(1-x)$, és az eredeti sor összege a konvergenciaintervallum belsejében $-\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^n(x-1)^n = (x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot 2^n(x-1)^{n-1} = (x-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\cdot 2^n(x-1)^n\right)' =$$
$$= (x-1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\cdot 2^n(x-1)^n\right)' = (x-1)\left(\frac{1}{3-2x}\right)' = \frac{2x-2}{(3-2x)^2},$$ ha a mértani sor konvergens, azaz ha $|2(x-1)| < 1$.

c) Ha $f(x)$ az összeg, akkor
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(3^n+2^n)(x+1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}3(3x+3)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}2(2x+2)^{n-1} = \frac{3}{1-(3x+3)} + \frac{2}{1-(2x+2)} = \frac{3}{-2-3x} + \frac{2}{-1-2x},$$ ahol mindkét mértani sor konvergens, azaz $|x+1| < \frac{1}{3}$, vagyis $x \in (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ esetén. Itt $f(x) = \int \frac{3}{-2-3x} + \frac{2}{-1-2x}\,dx = -\ln(-2-3x) - \ln(-1-2x) + C$, és az $x = -1$ behelyettesítéséből kapjuk, hogy $C = 0$, vagyis a sor összegfüggvénye $-\ln\big((2+3x)(1+2x)\big)$ $(x \in (-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}))$.

d) Ez felbontható egy mértani sor és egy $\sum nx^n$ típusú sor összegére. Az utóbbi összege
$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2},$$ ha $|x| < 1$. Ebből $$\sum_{n=0}^{\infty}(1+ni)(iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n + i\sum_{n=0}^{\infty}n(iz)^n = \frac{1}{1-iz} + i\frac{(iz)}{(1-iz)^2} = \frac{1-iz-z}{(1-iz)^2},$$ ha $|iz| < 1$, azaz $|z| < 1$.