1. *Adjuk meg a következő függvények 0 körüli Taylor-sorát!*

a) $\dfrac{1}{x+1}$ *b)* xe^x *c)* $\sqrt[3]{1+x}$ *c)* $\cos^2 x$ *d)* $\operatorname{arctg} x$ *f)* $\dfrac{x}{2-x}$

Megoldás: a) Kiszámíthatjuk a Taylor-sor képlete szerint is: $f(x) = (x+1)^{-1}$-re $f^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)(x+1)^{-n-1}$, ami 0-ban $(-1)^n n!$, így a Taylor-sor $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$; vagy észrevehetjük, hogy $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{1-(-x)}$ egy $-x$ hányadosú mértani sor összege (ha $|x|<1$), így 0 körüli sorfejtése $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$.

b) Mivel $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^n$ minden x-re, az xe^x függvény 0 körüli sorfejtése

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n.$$

c) $f(x) = (1+x)^{1/3}$-nak is könnyen kiszámíthatjuk az n-edik deriváltját:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}, \quad f^{(n)} = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-4}{3}\right)(x+1)^{-(3n-1)/3} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot(3n-4)}{3^n}(x+1)^{-(3n-1)/3} \quad (n \geq 2)$$

így a 0 körüli Taylor-sor $1 + \frac{1}{3}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}{3^n n!}x^n$.

d) Érdemes a $\cos^2 x$ függvényt linearizálni, és arra használni a $\cos x$-re ismert sorfejtést:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

e) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ a mértani sor összegképlete alapján, így az arctg függvényt megkapjuk ennek a tagonkénti integrálásával (ahol a konstans tag 0, mert $\operatorname{arctg} 0 = 0$):

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

f) $\dfrac{x}{2-x} = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}} = \dfrac{x}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^n.$

2. *Adjuk meg az* $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ *függvény* 0 *és* 1 *körüli Taylor-sorát!*

Megoldás: A polinom $1 + 3x - 3x^2 + 4x^3$ alakja egy 0 körüli hatványsor, így csak ez lehet a 0 körüli Taylor-sora. A harmadfokú polinom negyedik deriváltja már 0, ezért az 1 körüli Taylor-sorhoz csak az ennél alacsonyabb rendű deriváltakat kell kiszámolni:

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \qquad f'(x) = 12x^2 - 6x + 3 \qquad f''(x) = 24x - 6 \qquad f'''(x) = 24$$

$$f(1) = 5 \qquad f'(1) = 9 \qquad f''(1) = 18 \qquad f'''(1) = 24$$

Tehát $f(x)$ Taylor-sora $f(x) = 5 + 9(x-1) + 9(x-1)^2 + 4(x-1)^3$.

3. *Alkalmasan választott hatványsor segítségével számítsuk ki az alábbi számsorok összegét!*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n!}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Megoldás: a) $\dfrac{n}{(n+1)!}$ az $\dfrac{1}{(n+1)!}x^n$ deriváltjában az x^{n-1} együtthatója, vagyis a derivált értéke 1-ben, és így a keresett sorösszeg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n$ összegfüggvényének deriváltja az $x = 1$ helyen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^n = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^x - 1}{x},$$

ennek a deriváltja $\dfrac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2}$, ami 1-ben 1-et vesz föl, így ez a feladatban szereplő számsor összege.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2)^n$ az e^x Taylor-sora az $x = -2$ helyen, tehát a sorösszeg e^{-2}.

c) A 2.e) feladat megoldásából láthatjuk, hogy ez éppen az $\operatorname{arctg} x$ függvény értéke az $x = 1$, helyen, azaz $\frac{\pi}{4}$.

4. *Számítsuk ki a következő periodikus függvények Fourier-sorát!*

a) $f(x) = x$ *a* $(-1, 1]$ *intervallumon, és* f *periódusa* 2

b) $f(x) = |\sin x|$

c) $f(x) = \cos^2 x$

Megoldás: a) $f(x)$ páratlan függvény, ha az egész helyeken fevett értékeket kihagyjuk, és ez nem változtatja a Fourier-sort. Így a Fourier-sorban csak szinuszos tagok vannak: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$. A félperiódus 1, így

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = 2\int_0^1 x \sin n\pi x\,dx = \left[-\frac{2x}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\,dx =$$

$$\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\right]_0^1 = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \cdot 2.$$

Így a Fourier-sor

$$\sum_1^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x.$$

(Érdemes észrevenni, hogy — felhasználva a tényt, hogy a Fourier-sor előállítja a függvényt a folytonossági pontjaiban — $x = \frac{1}{2}$ behelyettesítéssel ebből is kijön a 3.c) feladat megoldása.

b) A félperiódus π, és a függvény páros, így a Fourier-sor $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ alakú.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |sinx|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\cos nx\,dx$$

$$\begin{aligned} I = \int \sin x\cos nx\,dx &= -\cos x\cos nx + \int \cos x(-n\sin nx)\,dx = \\ &= -\cos x\cos nx - \int n\cos x\sin nx\,dx = \\ &= -\cos x\cos nx - n\sin x\sin nx + \int n^2\sin x\cos nx\,dx = \\ &= -\cos x\cos nx - n\sin x\sin nx + n^2 I \quad \Rightarrow \\ I =& \frac{1}{n^2-1}\cos x\cos nx + \frac{n}{n^2-1}\sin x\sin nx + C \Rightarrow \\ a_n =& \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}(-\cos n\pi - 1) = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}, \end{aligned}$$

ami $-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}$, ha n páros, és 0 különben. Így a Fourier-sor

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4k^2-1}\cos(2kx)$$

c) A linearizálással kapható $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ kifejezés maga is egy Fourier-sor, tehát nem is kell integrálással kiszámítani az együtthatókat.

5. *Számítsuk ki a* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ *számsor összegét annak a* 2π *periódusú függvénynek a Fourier-sorából, amely a* $(-\pi,\pi]$ *intervallumon* x^2*-tel azonos!*

Megoldás: A függvény páros, folytonos, és fél periódusa π, tehát $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$ alakú, ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}, \text{ és}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,dx.$$

$$\begin{aligned}\int x^2\cos nx\,dx =& \frac{1}{n}x^2\sin nx - \int \frac{2}{n}x\sin nx\,dx = \\ =& \frac{1}{n}x^2\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \int \frac{2}{n^2}\cos nx\,dx = \\ =& \frac{1}{n}x^2\sin nx + \frac{2}{n^2}x\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx + C, \quad \text{tehát}\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2}\pi\cos n\pi = 4\cdot\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{és így} \quad f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\cdot\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Ebbe $x = 0$-t helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$0 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$