1. *Számítsuk ki az alábbi kettős- és hármasintegrálokat! Ábrázoljuk az integrálás tartományát!*

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x+2y)\,dy\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 y-xz\,dz\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^2\int_x^{2x} xy\,dy\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_{x-y}^{x+y}(z-2x-y)\,dz\,dy\,dx$

Megoldás: a) $\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos(x+2y)\,dy\,dx=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}\sin(x+2y)\right]_{y=\pi/4}^{y=\pi/2}dx=$
$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+\pi)-\sin(x+\frac{\pi}{2})\,dx=\frac{1}{2}\left[-\cos(x+\pi)+\cos(x+\frac{\pi}{2})\right]_0^{\pi/2}=$
$=\frac{1}{2}(-\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\pi+\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2})=-1.$
Az integrálási tartomány egy az $y=\pi/4$, $y=\pi/2$, $x=0$, $x=\pi/2$ egyenesek által határolt téglalap.

b) $\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 y-xz\,dz\,dy\,dx=\int_0^3\int_{-1}^1\left[yz-\frac{1}{2}xz^2\right]_{z=2}^{z=4}dy\,dx=\int_0^3\int_{-1}^1 2y-6x\,dy\,dx=\int_0^3\left[y^2-6xy\right]_{y=-1}^{y=1}dx=\int_0^3-12x\,dx=\left[-6x^2\right]_0^3=-54.$ Az integrálás tartománya egy téglatest.

c) $\int_0^2\int_x^{2x}xy\,dy\,dx=\int_0^2\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x}^{y=2x}=\int_0^2\frac{3}{2}x^3\,dx=\left[\frac{3}{8}x^4\right]_0^2=6.$
Az integrálási tartomány a $0\le x\le 2$ intervallum fölött az $y=x$ és $y=2x$ egyenesek által határolt síkrész, ami egy háromszög, $(0,0)$, $(2,2)$ és $(2,4)$ csúcsokkal.

d) $\int_0^1\int_0^x\int_{x-y}^{x+y}(z-2x-y)\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^x\left[\frac{1}{2}z^2-2xz-yz\right]_{z=x-y}^{z=x+y}dy\,dx=$
$=\int_0^1\int_0^x\frac{1}{2}(x+y)^2-2x(x+y)-y(x+y)-\frac{1}{2}(x-y)^2+2x(x-y)+y(x-y)\,dy\,dx=$
$\int_0^1\int_0^x-2y^2-2xy\,dy\,dx=\int_0^1\left[-\frac{2}{3}y^3-xy^2\right]_{y=0}^{y=x}=\left[-\frac{5}{3}x^3\right]_0^1=-\frac{5}{3}.$
Az integrálási tartomány egy az xy-síkbeli, $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ csúcsú háromszöglapra állított egyenes hasábból a $z=x-y$ és $z=x+y$ síkok által kimetszett térrész (valójában egy tetraéder, amelynek egyik lapja az $x=1$ síkon van, és a negyedik csúcsa az origó).

2. *Számítsuk ki az f függvény integrálját a T tartományon, ahol*

a) $f(x,y)=x\sqrt{x^2+y}$, $T=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3\}$;
b) $f(x,y)=\dfrac{y}{x+1}$, *T az $y=x$ és $y=x^2$ görbék által határolt korlátos tartomány;*
c) $f(x,y)=x+y$, $T=\{(x,y)\,|\,1\le x\le e,\ 0\le y\le\ln x\}$;
d) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2}$, *ahol T a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ csúcsú háromszögtartomány;*
e) $f(x,y,z)=z$, *T az $x,y,z\ge 0$ nyolcadtérből a $2x+y+z=4$ sík által kimetszett korlátos tartomány*

Megoldás: a) $\displaystyle\int_0^3\int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy=\int_0^3\int_0^1\frac{1}{2}(2x)(x^2+y)^{1/2}\,dx\,dy=$
$$=\int_0^3\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+y)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=1}dy=\int_0^3\frac{1}{3}(y+1)^{3/2}-\frac{1}{3}y^{3/2}\,dy=$$
$$=\left[\frac{2}{15}(y+1)^{5/2}-\frac{2}{15}y^{5/2}\right]_0^3=\frac{62-18\sqrt{3}}{15}.$$

b) A két görbe a $(0,0)$ és $(1,1)$ pontokban metszi egymást, és a két pont között a parabola halad alacsonyabban, így az integrálás a $0\le x\le 1$, $x^2\le y\le x$ egyenlőtlenségekkel megadott tartományon történik.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{y}{x+1}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{x+1}\right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^2-x^4}{2(x+1)}\,dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{-x^2(x^2-1)}{2(x+1)}\,dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}x^2(x-1)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$

c) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} x+y\,dy\,dx = \int_1^e \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\ln x} dx = \int_1^e x\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx$. Mindkét tag integrálját parciális integrálással tudjuk kiszámítani:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C, \text{, és}$$

$$\int \frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - \int \frac{1}{2}x\cdot\frac{2}{x}\ln x\,dx = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - \int \ln x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x + \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x + x + C.$$

Ebből

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} x+y\,dy\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x - \frac{1}{4}x^2 + x\right]_1^e = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}e - \frac{3}{4}.$$

Valamivel egyszerűbb az integrál, ha megcseréljük a sorrendet (és ehhez tartozóan átírjuk a határokat is!):

$$\int_0^1 \int_{e^y}^e x+y\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_{e^y}^e dy = \int_0^1 \frac{1}{2}e^2 + ey - \frac{1}{2}e^{2y} - ye^y\,dy =$$
$$= \left[\frac{1}{2}e^2y + \frac{1}{2}ey^2 - \frac{1}{4}e^{2y} - ye^y\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot e^y\,dy = \left[\frac{1}{2}e^2y + \frac{1}{2}ey^2 - \frac{1}{4}e^{2y} - ye^y + e^y\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}e - \frac{3}{4}.$$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{1+x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}\,dx =$
$$= \left[\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

e) Látható, hogy a tartomány egy tetraéder. Csúcsai az origón kívül a sík metszetei a tengelyekkel, azaz $(2,0,0)$, $(0,4,0)$ és $(0,0,4)$. Az xy-síkra vett vetülete az a háromszög, amelyet a két tengelyen kívül az $y = 4-2x$ egyenes határol. Így az integrálás határai: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4-2x$ és $0 \le z \le 4-2x-y$.
$$\int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-2x-y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{-2x+4} \frac{1}{2}(4-2x-y)^2\,dy\,dx =$$
$$\int_0^2 \left[-\frac{1}{6}(4-2x-y)^3\right]_{y=0}^{y=4-2x} dx = \int_0^2 \frac{1}{6}(4-2x)^3\,dx = \left[-\frac{1}{48}(4-2x)^4\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

3. *Számítsuk ki az $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=2-2x^2$ felületek által határolt korlátos tartomány térfogatát!*

4. *Az integrálás sorrendjének felcserélésével számítsuk ki az alábbi kettősintegrálokat!*

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{1+x^2}^5 xe^{(y-1)^2}\,dy\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right)dx\,dy$

Megoldás:

b) Az integrálás tartománya az $y = x^2$ parabola, az $y = 1$ egyenes és az $x = 2$ egyenes által közrezárt tartomány. Ezen másik sorrendben integrálva: $\int_1^2 \int_1^{x^2} \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dy\,dx = \int_1^2 (x^2-1)\sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx = \left[-\cos\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right]_1^2 = -\cos\frac{2}{3} + \cos\left(-\frac{2}{3}\right) = 0.$

5. *Használjunk alkalmas polár-koordinátarendszert a következő integrálok kiszámításához!*

a) $f(x,y) = x^2$ *integrálja az origó körüli* 1 *sugarú körlap első nyolcadán*

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *integrálja a* $T = \{(x,y) \mid x^2 - 2x + y^2 = 0\}$ *tartományon*

c) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} 1\,dx\,dy$

d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$

e) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{\sqrt{y^2+z^2}} x\,dx\,dy\,dz$

f) $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$

ahol $T = \{(x,y,z) \mid \sqrt{3x^2+3y^2} \le z,\ 9 \le x^2+y^2+z^2 \le 81\}$

Megoldás:

a) $\int_0^{\pi/4} \int_0^1 r^2\cos^2\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{4}r^4\cos^2\varphi\right]_0^1 d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 2\varphi\,d\varphi = \left[\frac{1}{8}\varphi + \frac{1}{16}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{32} + \frac{1}{16}.$

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} r \cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos^3\varphi\,d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi = \left[\frac{8}{3}\sin\varphi - \frac{8}{9}\sin^3\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{16}{9} - \left(-\frac{16}{9}\right) = \frac{32}{9}.$

d) $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\sin r^2) r\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2}\cos r^2\right]_0^1 d\varphi = \frac{\pi}{4}(1-\cos 1)$

f) Gömbi koordinátákkal felírva a tartományt definiáló egyenlőtlenségeket ($x = R\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = R\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = R\cos\vartheta$): $\sqrt{3x^2+3y^2} = \sqrt{3R^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + 3R^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta} = \sqrt{3}R\sin\vartheta \le z = R\cos\vartheta$, azaz $\operatorname{tg}\vartheta \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, vagyis $0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{6}$, és $3 \le R \le 9$. Mivel a gömbi koordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsa $R^2\sin\vartheta$, az integrál értéke $\int_0^{\pi/6} \int_0^{2\pi} \int_3^9 \sin\vartheta\,dR\,d\varphi\,d\vartheta = \int_0^{\pi/6} 12\pi\sin\vartheta\,d\vartheta = [-12\pi\cos\vartheta]_0^{\pi/6} = 12\pi\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\pi(2-\sqrt{3}).$

6. *Számítsuk ki az alábbi tartományok térfogatát:*

a) *A* $z = x^2+y^2$ *és* $z = 27 - 2x^2 - 2y^2$ *paraboloidok által határolt korlátos tartomány;*

b) Az 1 sugarú göbből 90°*-os nyílásszögű, a gömb középpontjába eső csúcsú kúp által kivágott rész;*

c) A $T = \{(x,y,z) \,|\, z \le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2 \ge 1,\ z > 0\,\}$.

Megoldás:

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 1\cdot R^2 \sin\vartheta \, dR\, d\varphi\, d\vartheta = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$

c) Ez egy 2 sugarú gömb felső felének egy 1 sugarú hengeren kívül eső része. Hengerkoordinátákkal érdemes kiszámolni a térfogatot: $\displaystyle\int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, d\varphi\, dr =$
$\displaystyle\int_1^2\int_0^{2\pi} r\sqrt{4-r^2}\, d\varphi\, dr = \int_1^2 2\pi r\sqrt{4-r^2}\, dr = \left[-\pi(4-r^2)^{3/2}\frac{2}{3}\right]_1^2 = 2\sqrt{3}\pi.$