1. *Legyen* $S_1: \ x-2y+z=3$*,* $S_2: \ x+y+z=0$ *és* $S_3: \ x-y=4$ *három sík egyenlete. Adjuk meg az* $S_1 \cap S_2$ *metszetegyenes paraméteres vektoregyenletét! Van-e a három síknak közös pontja?*

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 1-t \\ y & = & -1 \\ z & = & t \end{array}, \text{ azaz } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ (t \in \mathbb{R}).$$

A három sík metszetét megkaphatjuk a metszetegyenes és S_3 metszeteként: $(1-t)-(-1) = 4 \iff t=-2$, azaz $(3,-1,-2)$ közös pont.

Megjegyzés: A közös pont létezésének bizonyításához az is elég, hogy a metszetegyenes nem párhuzamos a síkkal, mert az irányvektora nem merőleges a sík normálvektorára: $(-1,0,1)(1,-1,0) = -1 \neq 0$*.*

Vagy akár meg lehet oldani a három egyenletből álló egyenletrendszert, vagy legalább lépcsős alakra hozni, hogy látsszon, hogy van megoldás.

2. *Határozzuk meg az* $A \cdot A$ *és* $A^T \cdot A$ *mátrixok rangját, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát $A^2 = A \cdot A$ rangja 1.

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát $A^T A$ rangja 2.

3. *Számítsuk ki az alábbi A komplex mátrix determinánsát és inverzét!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

Megoldás: $|A| = 1 \cdot (i^2 - 0) = i^2 = -1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -i & 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & i & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix}.$$

4. *Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek értékétől függően hány megoldása van az alábbi kibővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek?*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & b & 2-a & 1 \\ 1 & b+2 & a & 2b \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & b & 2-a & 1 \\ 1 & b+2 & a & 2b \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & b & 2-a & 1 \\ 0 & b & a-2 & 2b-1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & b & 2-a & 1 \\ 0 & 0 & 2a-4 & 2b-2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & 0 & a-2 & b-1 \end{array}\right]$$

Ha $a = 2$ és $b \neq 1$, akkor nincs megoldás.
Ha $a = 2$ és $b = 1$, akkor végtelen sok megoldás van.
Ha $a \neq 2$ és $b = 0$, akkor is végtelen sok megoldás van (a 2. és 3. sor cseréjével lépcsős alakot kapunk).
Ha $a \neq 2$ és $b \neq 0$, akkor 1 megoldás van.

5. *Válasszunk ki a* $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 3, 1)$ *és* $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 1, 0)$ *vektorok közül maximális számú függetlent, és írjuk fel a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként!*

Megoldás:

$$[\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{v}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A redukált lépcsős alak oszlopai között ugyanazok a lineáris összefüggések igazak, mint az eredeti mátrix oszlopai között. Az utóbbinak a vezéregyesei az első két oszlopban vannak (ezek az oszlopok itt $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$), így az eredeti mátrix oszlopai közül is az első kettő független, és kigenerálja a többit. A redukált lépcsős alakból leolvashatók a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ közötti lineáris összefüggések is:
$\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ független, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

6. *a) Számítsuk ki annak az $n \times n$-es ($n \geq 2$) A mátrixnak a determinánsát, amelynek főátlójában rendre $1, 2, 3, \dots, n$ állnak, az első és utolsó oszlopának többi eleme 1, és a mátrix többi eleme 0. (Útmutatás: elemi sor- vagy oszlopműveletekkel hozzuk háromszög alakra.)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg (a Cramer-szabály segítségével) az $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ egyenletrendszer megoldásában x_1-et, ha A az a) részben szereplő mátrix, és $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$.

Megoldás: a) Ha az első oszlopot kivonjuk az utolsóból, alsó háromszögmátrixot kapunk, a főátlójában az $1, 2, \dots, n-1, n-1$ elemekkel, így a determináns $(n-1) \cdot (n-1)!$. (Vagy az első sort vonjuk ki az összes alatta levőből, így felső háromszögmátrixhoz jutunk, ugyanolyan diagonális elemekkel.)

b) Ha A első oszlopát az $\mathbf{e}_1$ vektorral helyettesítjük, felső háromszögmátrixot kapunk, $1, 2, , \dots, n$ diagonális elemekkel, így ennek a mátrixnak a determinánsa $n!$, és a Cramer-szabály szerint ekkor $x_1 = \dfrac{n!}{(n-1)(n-1)!} = \dfrac{n}{n-1}$.

7. *Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v} \times (1, 1, 0)) \times (1, -1, 1)$. Számítsuk ki egy általános $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektor képét f-nél, majd határozzuk meg f standard mátrixát, továbbá adjuk meg f magterének és képterének egy-egy bázisát!*

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-z,\ z,\ x-y), \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -z & z & x-y \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y+z,\ x-y+z,\ 0),$$

tehát $f(x, y, z) = (x-y+z,\ x-y+z,\ 0)$, és ebből az A standard mátrix:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ha az A-t redukált lépcsős alakra hozzuk: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, láthatjuk, hogy a képtér bázisa az A első oszlopából áll, azaz $\{(1, 1, 0)\}$, és a magtér az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldástere:

$$\begin{aligned} x &= s - t \\ y &= s \\ z &= t \end{aligned}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

amiből a magtér bázisa $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.