1. Legyen $S_1: \ x-2y+z=3$, $S_2: \ x+y+z=0$ és $S_3: \ x-y=4$ három sík egyenlete. Adjuk meg az $S_1 \cap S_2$ metszetegyenes paraméteres vektoregyenletét! Van-e a három síknak közös pontja? (*5 pont*)

2. Határozzuk meg az $A \cdot A$ és $A^T \cdot A$ mátrixok rangját, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(*8 pont*)

3. Számítsuk ki az alábbi A komplex mátrix determinánsát és inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}$$

(*7 pont*)

4. Az $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek értékétől függően hány megoldása van az alábbi kibővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & b & 2-a & 1 \\ 1 & b+2 & a & 2b \end{array}\right]$$

(*8 pont*)

5. Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (1,2,0,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,-1,-1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1,1,3,1)$ és $\mathbf{v}_4 = (0,1,1,0)$ vektorok közül maximális számú függetlent, és írjuk fel a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként! (*7 pont*)

6. a) Számítsuk ki annak az $n \times n$-es ($n \geq 2$) A mátrixnak a determinánsát, amelynek főátlójában rendre $1, 2, 3, \ldots, n$ állnak, az első és utolsó oszlopának többi eleme 1, és a mátrix többi eleme 0. (Útmutatás: elemi sor- vagy oszlopműveletekkel hozzuk háromszög alakra.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & n \end{bmatrix}$$

b) Határozzuk meg (a Cramer-szabály segítségével) az $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ egyenletrendszer megoldásában x_1-et, ha A az a) részben szereplő mátrix, és $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^T$. (*6 pont*)

7. Legyen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v} \times (1,1,0)) \times (1,-1,1)$. Számítsuk ki egy általános $\mathbf{v} = (x,y,z)$ vektor képét f-nél, majd határozzuk meg f standard mátrixát, továbbá adjuk meg f magterének és képterének egy-egy bázisát! (*9 pont*)