

Integrálszámítás (ismétlés)

Integrálási módszerek

1. Integrandus átalakítása (polinomszorzás kifejtése, osztás, trigonometrikus átalakítások, ...)
2. Láncszabály, spec. esetei: $\frac{f'}{f}$, $f' \cdot f^n$, $f(ax + b)$ alakú integrandus
3. Parciális integrálás ($\int f \cdot g$ visszavezetése $\int F \cdot g'$ integrálra)
4. Helyettesítés (az integrandusban összetett függvény van, és szorzótényezőként ott szerepel vagy "becsempészhető" a belső függvény deriváltja)
5. $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ alakú kifejezés az integrandusban (teljes négyzetté való kiegészítéssel $\sqrt{\pm u^2 \pm 1}$ alakra hozva, szükség esetén trigonometrikus vagy hiperbolikus helyettesítéssel)
6. Racionális törtfüggvények integrálása elemi törtfüggvényekre bontással

Feladatok

Számítsuk ki a következő integrálokat!

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\int \cos^3 2x \, dx$ | 2. $\int (x^2 + 2x) \ln x \, dx$ | 3. $\int \ln \frac{x^3}{x+1} \, dx$ |
| 4. $\int_1^2 (2x-3)^{100} \, dx$ | 5. $\int \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 1} \, dx$ | 6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}} \, dx$ |
| 7. $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ | 8. $\int \ln^2 x \, dx$ | 9. $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} \, dx$ |
| 10. $\int \sqrt{x^2 + 2x} \, dx$ | 11. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$ | 12. $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} \, dx$ |
| 13. $\int_1^2 \frac{2x^3}{x^2 + 5} \, dx$ | 14. $\int \frac{1}{x^4 + x^2} \, dx$ | 15. $\int \frac{5x + 3}{x^2 - 4x + 5} \, dx$ |

Megoldások:

1. $\cos^3 2x = \cos 2x(1 - \sin^2 2x)$ átalakítással és láncszabállyal: $\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} (\sin 2x)^3 + C$
2. Parciális integrálással: $(\frac{1}{3}x^3 + x^2) \ln x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$
3. $\ln \frac{x^3}{x+1} = 3 \ln x - \ln(x+1)$ felbontással, és parciális integrálással:
 $3x \ln x - (x+1) \ln(x+1) - 2x + C$
4. $\frac{1}{101}$
5. Maradékos osztás után a számláló szétbontásával: $\frac{1}{2}x^2 + \ln(x^2 + 1) - 5 \operatorname{arctg} x + C$
6. Teljes négyzetté való kiegészítéssel a gyök alatt: $\operatorname{arsh}(\frac{1}{2}x - 1) + C$
7. Láncszabállyal: $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$

8. Kétszeres parciális integrálással: $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$

9. $u = x^2$ helyettesítéssel, majd parciális integrálással (az improprius integrál kiértékelésénél L'Hospital-szabállyal): $\lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}b^2 e^{-b^2} - \frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

10. Teljes négyzetté való kiegészítéssel, majd $x+1 = \operatorname{ch} u$, helyettesítéssel $\int \operatorname{sh}^2 u \, du$, és itt linearizálás után integrálva $\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2} \operatorname{arch}(x+1) + C$

11. Az $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \operatorname{arctg} x$ felbontás szerint parciálisan integrálva:
 $\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arsh} x + C$

12. Az integrandust elemi törtekre bontva: $\int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} \, dx =$
 $\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{2(x-2)} + C$

13. Maradékos osztás után: $\int_1^2 2x - 5 \cdot \frac{2x}{x^2+5} = [x^2 - 5 \ln(x^2+5)]_1^2 = 3 - 5 \ln \frac{3}{2}$

14. Elemi törtekre bontással: $-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$

15. A számláló szétbontásával:

$$\int \frac{\frac{5}{2}(2x-4) + 13}{x^2 - 4x + 5} \, dx = \frac{5}{2} \ln(x^2 - 4x + 5) + 13 \operatorname{arctg}(x-2) + C$$