1. Mi lehet egy lineáris egyenletrendszer $[A|\mathbf{b}]$ kibővített mátrixának a rangja, ha tudjuk, hogy

a) az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és az ismeretlenek száma 2;

b) az egyenletrendszernek nincs megoldása, és A rangja 3;

c) az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, és A 3×2-es mátrix?

2. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ is megoldása. Adjuk meg még két különböző megoldását az egyenletrendszernek! Mekkora lehet az egyenletrendszer mátrixának a rangja? Mekkora lehet ez a rang, ha az egyenletrendszer homogén?

3. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?

a) $\{ (1,2,-1,0), (1,1,2,1), (2,0,1,3) \}$

b) (**Hf**) $\{ (0,1,3), (2,1,-1), (4,3,1) \}$

4. Állítsuk elő a $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,-1,3)$ és $\mathbf{v}_3 = (0,1,-2,-1)$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = (0,-1,3,-1)$, $\mathbf{b} = (1,1,0,1)$ és $\mathbf{c} = (3,2,-2,3)$ vektorok közül azokat, amelyeket lehet! (**Hf**: befejezni)

5. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben az alábbi részhalmazok? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát is!

a) $\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1 \}$

b) $\{ (x,y,z) \mid x + 2y + z = 0 \}$

c) $\{ (x,y,z) \mid x + 2y + z = 1 \}$

d) $\{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \}$

e) $\{ (x,y,z) \mid x^3 + y^3 + z^3 = 0 \}$

6. Vegyük $\mathbb{R}^3$-ben a $\mathcal{B} = \{ (1,3,-1), (0,1,1), (2,-1,0) \}$ bázist. Melyik az a $\mathbf{v}$ vektor, amelynek $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektora $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, és mi a $\mathbf{w} = (3,0,-3)$ vektor koordinátavektora $\mathcal{B}$ szerint? (**Hf**: befejezni)

7. Adjuk meg az alábbi mátrixok sorterének, oszlopterének és nullterének egy-egy bázisát!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ b) (**Hf**) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

8. Válasszunk ki a következő vektorhalmazokból maximális független rendszert, és fejezzük ki a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként!

a) $\{ (1,2,3), (-2,-4,-6), (1,1,1), (0,1,2), (2,1,0) \}$

b) (**Hf**) $\{ (0,1,1,-1), (1,2,1,0), (1,0,-1,2), (-2,-1,1,-3) \}$

9. Adjuk meg az U merőleges kiegészítő alterének egy bázisát a V-ben, ha

a) $U = \operatorname{span}\big((1,2,0,1), (3,1,-1,1), (1,-3,-1,-1)\big)$, $V = \mathbb{R}^4$;

b) (**Hf**) $U = \operatorname{span}\big((1,2,-1)\big)$, $V = \mathbb{R}^3$.

A házi feladatok megoldása

3.b) Az $x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ vektoregyenletnek, azaz a $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ homogén egyenletrendszernek van nem triviális megoldása, mert a mátrix lépcsős alakja $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Így a vektorrendszer nem független. (Az egyenletrendszer megoldásából az is leolvasható, hogy a harmadik vektor az első vektornak és a második vektor kétszeresének összege.)

4. Érdemes a három vektor előállítását szimultán egyenletrendszerként kiszámolni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \mapsto \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

A három konstansoszlopot külön tekintve leolvashatók a megoldások: $\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{b}$ nem állítaható elő, és $\mathbf{c} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

6. $\mathbf{v} = (1,3,-1) + 2(0,1,1) - (2,-1,0) = (-2,6,1)$, és a 4. feladat módszerével kiszámíthatjuk, hogy a $\mathbf{w}$ előállításában a báziselemek együtthatói 1, -2 és 1, így $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7. A mátrix redukált lépcsős alakja: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ebből leolvasható, hogy az oszloptér bázisa $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ (az eredeti mátrixoknak azok az oszlopai, amelyeknek megfelelő oszlopok a lépcsős/redukált lépcsős alakban tartalmaznak vezérelemet). A sortérnek bázisát adják a lépcsős/redukált lépcsős alak nem nulla sorai, ugyanis a sorműveletek a sorteret nem változtatják, és a kapott sorok nyilvánvalóan függetlenek: $\{[1 \ 0 \ 1 \ 0], [0 \ 1 \ 1 \ 0], [0 \ 0 \ 0 \ 1]\}$. A nulltér a mátrixhoz mint együtthatómátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere: ha a megoldásokat vektoros alakban írjuk, akkor az független vektorok tetszőleges lineáris kombinációjaként lesz megadva. Itt a megoldás $\begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, tehát a nulltér bázisa $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. (Ez egyúttal a sortér merőleges kiegészítője).

8.b) A 7. feladatbeli módszer úgy adja meg az oszloptérnek egy bázisát, hogy maximális független rendszert választ ki az oszlopokból. Tehát a megadott vektorokat egy mátrix oszlopaivá tesszük, és alkalmazzuk a 7. feladatbeli módszert.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \mapsto \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ennek alapján az első két vektor bázist alkot: $\{\,(0,1,1,-2),(1,2,0,-1)\,\}$, és mivel a sorműveletek nem változtatják meg a lineáris összefüggéseket az oszlopok között, a redukált alakban a többi oszlop (a vezéregyesekkel egy sorban levő) együtthatói megmutatják, hogy milyen együtthatós lineáris kombináció adja meg az eredeti vektort a kiválasztott bázisból: $(1,0,-1,2) = -2\cdot(0,1,1,-1)+1\cdot(1,2,1,0)$ és $(-2,-1,1,-3) = 3\cdot(0,1,1,-1)-2\cdot(1,2,1,0)$.

9.b) A megadott vektorokat egy mátrix soraiba írjuk, és akkor a nulltér bázisa lesz a merőleges kiegészítő. $[\,1 \quad 2 \quad -1 \quad | \quad 0\,]$ eleve redukált lépcsős alak, az egyenlet(rendszer) megoldása $\begin{bmatrix} -2s+t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, és ebből a merőleges kiegészítő altér bázisa $\{\,(-2,1,0),(1,0,1)\,\}$.