1. Legyen

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-1&2\\2&3\\3&4\end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixműveletek közül végezzük el azokat, amelyek értelmezve vannak!

$$A+A,\quad A+B,\quad AB,\quad AC,\quad AC+2C,\quad AD-3D,\quad D^2,\quad CC^T,\quad BC,\quad CB.$$

2. Számítsuk ki a következő mátrixok n-edik hatványát:

a) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$; b) (**Hf**) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix}2&-4\\1&-2\end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$.

3. Egy mátrixot szimmetrikusnak nevezünk, ha $A^T=A$. A 2. feladat mátrixai közül melyek szimmetrikusak? Bizonyítsuk be, hogy AA^T mindig szimmetrikus mátrix!

4. (**Hf**) Igazak-e minden $n\times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?

a) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$;
b) $(A+I_n)(A-I_n)=A^2-I_n^2$;
c) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;
d) $(AB)^T=A^TB^T$.

5. Legyen $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

a) Mik az XA oszlopai, ha X oszlopai $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$?
b) Mik az AY sorai, ha Y sorai $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$?

6. (**Hf**) Mi történik egy $n\times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi $n\times n$-es mátrixokkal megszorozzuk?

$$A=\begin{bmatrix}3&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&2&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}0&1&\dots&0\\1&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}$$

7. Legyen $A=\begin{bmatrix}3&1&-1\\0&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$ és $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}$. Szimultán egyenletrendszerként oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket!

a) $AX=B$
b) (**Hf**) $BX=A$
c) (**Hf**) $XA=B$ (azaz $A^TX^T=B^T$)

8. Számítsuk ki az alábbi mátrixok közül az invertálhatók inverzét! (**Hf**: b), c), d))

a) $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&-2\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&-1&1\\0&3&-2\end{bmatrix}$

A házi feladatok megoldása

2.b) Az első néhány hatványból megsejthetjük: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ez $n = 1$-re nyilván igaz, és ha n-re igaz, akkor $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. a) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$, és ez általában nem egyenlő $A^2 - B^2$-tel, mert $AB \neq BA$.
b) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, és ez az előbbiek miatt nem $A^2 + 2AB + B^2$.
c) Az a)-beli átalakítást használhatjuk $B = I_n$-re, de $AI_n = I_nA = A$, tehát itt lehet egyszerűsíteni, és ezért igaz az állítás.
d) $(AB)^T = B^TA^T$, és ez általában nem egyenlő A^TB^T-vel.

6. Ha balról szorzunk: A az első sort szorozza 3-mal, B az első sorhoz hozzáadja a második sor kétszeresét, C pedig felcseréli az első és a második sort. Ha jobbról szorzunk: A az első oszlopot szorozza hárommal, B a második oszlophoz hozzáadja az első oszlop kétszeresét, C pedig felcseréli az első két oszlopot.

7.b) A BX mátrix oszlopai az X oszlopainak B-szeresei, tehát a mátrixegyenletet megoldhatjuk szimultán egyenletrendszerként.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \mapsto\mapsto\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Ellentmondásos az egyenletrendszer (X első és harmadik oszlopára nincs megoldás), tehát nincs ilyen X mátrix.

c) $XA = B \;\Leftrightarrow\; A^TX^T = B^T$. Oldjuk meg az utóbbit szimultán egyenletrendszerként!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \mapsto\mapsto\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7 & -5 \end{array}\right].$$

Így $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -7 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.

8.b) Nem invertálható, mert nem négyzetes mátrix.

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto\mapsto\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

így $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

d)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto\mapsto\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

ellentmondásos, így D nem invertálható.