Órai feladatok

1. Tekintsük az origó körüli egységkör x tengely fölötti félkörívének következő paraméterezéseit.

I. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$;
II. $\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $-1 \leq t \leq 1$;
III. $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
IV. $\mathbf{r}(t) = (\cos t, |\sin 2t|)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Melyik paraméterezések írnak le egyenletes (pályamenti) sebességű mozgást? Az egyenletesek közül melyik mozog lassabban, illetve gyorsabban? A nem egyenletesek hol mozognak lassabban, illetve gyorsabban?

(I. és III. egyenletes, III. kétszer olyan gyors, mint az I. IV. a $(0, \pi)$ és $(\pi, 2\pi)$ szakaszon egyenletes, oda-vissza megy a körön. II. az út elején és végén gyors, a közepén a leglassabb.)

2. Milyen görbét írnak le a következő függvények?

a) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$;
b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2+t^2, 1-4t^2)$.

(Csavarvonal és félegyenes.)

3. (Térbeli kör leírása) Paraméterezzük az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és az $x + 2y = 0$ felületek metszetgörbéjét.

($\mathbf{r}(t) = (-\frac{4}{\sqrt{5}}\cos t, \frac{2}{\sqrt{5}}\cos t, 2\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.)

4. Számítsuk ki a 2. feladat paraméterezett görbéire a sebességvektorokat és a görbementi sebességet.

(a) $\mathbf{r}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 1)$, $|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{5}$; b) $\mathbf{r}'(t) = 2t(1, 1, -4)$, $|\mathbf{r}'(t)| = 6\sqrt{2}|t|$.)

5. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (t^2, \dfrac{t+1}{t}, \dfrac{t}{t+1})$ görbe érintőegyenesének egyenletrendszerét a $t_0 = 1$ paraméterű pontban.

($x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t$.)

6. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t)$ függvényt, ha tudjuk, hogy $\mathbf{r}'(t) = (t^3+4t, t, 2t^2)$, és $\mathbf{r}(0) = (1, 1, 0)$.

($\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{4}t^4 + 2t^2 + 1, \frac{1}{2}t^2 + 1, \frac{2}{3}t^3)$.)

7. Az origó körüli egység sugarú felső félkör $\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ $(-1 \leq t \leq 1)$ paraméterezésére számítsuk ki a gyorsulást az $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ pontban, és határozzuk meg a gyorsulásvektor pályára merőleges komponensét.

($\mathbf{r}'(t) = (1, -t/\sqrt{1-t^2})$, $\mathbf{r}''(t) = (0, -1/(1-t^2)^{3/2})$, $t_0 = 1/\sqrt{2}$, $\mathbf{r}'(t_0) = (1, -1)$, $\mathbf{r}''(t_0) = (0, -2\sqrt{2})$. Az $\mathbf{r}''(t_0)$ pályára merőleges komponense $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.)

8. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ csavarvonal hosszát a $t_1 = 0$ és $t_2 = 2\pi$ pontok között.

($2\sqrt{5}\pi$.)

Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r} = (3-t, t^2-4, 2t-2)$ síkgörbe, és adjuk meg a görbét tartalmazó sík egyenletét. (Útmutatás: keressük meg azokat az A, B, C, D paramétereket, amelyekre a görbe pontjai kielégítik az $Ax + By + Cz = D$ egyenletet.)

2. Paraméterezzük az $x^2 + y^2 = z^2$ és az $x + y + z = 1$ felületek metszetgörbéjét!

3. Adjuk meg az $\mathbf{r} = \left(\frac{1}{1-t}, \ln(1+t^2), e^{-t}\right)$ görbe érintőjének egyenletrendszerét a $t_0 = 2$ paraméterű pontban.

4. Adjuk meg azt az $\mathbf{r}(t)$ vektorértékű függvényt, amelyre $\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{3}{2}(t+1)^{1/2}, e^{-t}, \frac{1}{1+t}\right)$, és $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 1)$.

5. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t)$ görbét, ha $\mathbf{r}''(t) = (6t, 12t^2, 2)$, $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ és $\mathbf{r}'(0) = (0, 1, 1)$.

6. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \left(t+1, \frac{t^2}{2}, \frac{2\sqrt{2t^3}}{3}\right)$ görbe ívhosszát a -2 és 0 paraméterű pontok között.

Eredmények

1. $2x + z = 4$.
2. $\mathbf{r}(t) = (t, 1 + \frac{1}{2t-2}, -t - \frac{1}{2t-2})$ (hiperbola, amely kúp és sík metszeteként állt elő).
3. $x = -1 + t$, $y = \ln 5 + \frac{4}{5}t$, $z = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2}t$.
4. $\mathbf{r}(t) = \big((t+1)^{3/2} - 1, -e^{-t} + 1, \ln(1+t) + 1\big)$, $t > -1$.
5. $\mathbf{r}(t) = (t^3 + 1, t^4 + t, t^2 + t)$.
6. $\int\limits_{-2}^{0} |t+1|\, dt = 1$.