Órai feladatok

1. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, t)$ görbe ívhosszát a $0 \le t \le 1$ szakaszon!

Megoldás: *Az ívhossz:* $\int\limits_0^1 \sqrt{1+t^2}d\tau = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arsh} t + \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{arsh} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Az integrál kiszámításánál* $t = \operatorname{sh} u$ *helyettesítést használunk, és a* $\operatorname{ch}^2 u$ *kiintegrálásánál a* $\operatorname{ch}^2 u = (1+\operatorname{ch} 2u)/2$ *linearizáló formulát.*

2. Térjünk át ívhosszparaméterre az $\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{t^3}, t)$, $0 \le t \le 3$ görbénél.

Megoldás: *Az* $s = \int_0^t \sqrt{2 + \frac{9}{4}\tau}\, d\tau = \frac{2}{3}(2+\frac{9}{4}t)^{3/2} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$ *összefüggésből* $t = \frac{4}{9}((\frac{3}{2}s + 2\sqrt{2})^{2/3} - 2)$, *és ezt az* $\mathbf{r}(t)$ *képletébe helyettesítve:*

$$\mathbf{r} = (\frac{4}{9}((\frac{3}{2}s + 2\sqrt{2})^{2/3} - 2), (\frac{4}{9}((\frac{3}{2}s + 2\sqrt{2})^{2/3} - 2))^{3/2}, \frac{4}{9}((\frac{3}{2}s + 2\sqrt{2})^{2/3} - 2)).$$

3. Számítsuk ki a görbületet az R sugarú félkör következő paraméterezéseiből!

a) $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $0 \le t \le \pi$;

b) $\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{R^2 - t^2})$,$-R \le t \le R$.

Megoldás: *A* $\kappa = |\mathbf{T}'(t)|/|\mathbf{r}'(t)|$ *képletet használva mindkét változatban megkapjuk a* $\kappa = 1/R$ *görbületet, azaz simulókör — amely ezúttal az eredeti görbe — sugarának reciprokát.*

4. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (t^4, \frac{4}{3}t^3, t^2)$ görbe főnormális egységvektorát a $t_0 = -1$ paraméterű pontban!

Megoldás: $\mathbf{r}' = (4t^3, 4t^2, 2t)$, $\mathbf{r}'' = (12t^2, 8t, 2)$, $\mathbf{r}'(-1) = (-4, 4, -2)$, $\mathbf{r}''(-1) = (12, -8, 2)$, $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'$ *a* -1 *helyen* $48(2, 1, -2)$, *és ebből* $N = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. *Másképpen:* $T(t) = \frac{-1}{2t^2+1}(2t^2, 2t, 1)$, *és ebből* $T'(-1) = \frac{2}{9}(2, 1, -2)$, *és* $N = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Gyakorló feladatok

1. Térjünk át ívhosszparaméterre az $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ görbénél!

2. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \left(1 - 2t^2, t^3 - 2, \frac{1}{t}\right)$ görbe görbületét a $t = -1$ paraméterű pontjában!

3. Adjuk meg az $\mathbf{r}(t) = (t+1, t^3, t^2 - 3)$ görbe érintő és főnormális egységvektorát a $t_0 = 1$ paraméterű pontjában! (Akiknél ez volt az órai példa, azok az órai feladatnak írt 4. feladatot oldják meg helyette!)

Megoldások

1. $|\mathbf{r}'| = 5\sin t\cos t = \frac{5}{2}\sin 2t$, ebből $s = \int_0^t |\mathbf{r}'(\tau)|\, d\tau = -\frac{5}{4}\cos 2t + \frac{5}{4}$, azaz $\cos 2t = 1 - \frac{4}{5}s$. Ebből kifejezhetjük t-t, de egyszerűbb közvetlenül $\mathbf{r}(t)$ komponenseit kiszámolni, így $\mathbf{r} = \left((1-\frac{2}{5}s)^{3/2}, (\frac{2}{5}s)^{3/2}, 1 - \frac{4}{5}s\right)$.

2. $\mathbf{r}'(-1) = (4, 3, -1)$, $\mathbf{r}''(-1) = (-4, -6, -2)$, $\mathbf{r}'(-1) \times \mathbf{r}''(-1) = (-12, 12, -12)$, $|\mathbf{r}'(-1) \times \mathbf{r}''(-1)| = 12\sqrt{3}$, $|\mathbf{r}'(-1)| = \sqrt{26}$, $\kappa = (12\sqrt{3})/(26\sqrt{26})$.

3. $\mathbf{r}'(1) = (1, 3, 2)$, $\mathbf{r}''(1) = (0, 6, 2)$, $(\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1)) \times \mathbf{r}'(1) = (-22, 18, -16)$, és N ennek a normáltja $(-11, 9, -8)/\sqrt{266}$.