Órai feladatok

1. Adjuk meg az $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t)$ görbe $(\frac{\pi}{2}, 1)$ pontbeli simulókörének egyenletét!

Megoldás: *Tekinthetjük térbeli görbének: $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t, 0)$, és így alkalmazhatók a térbeli képletek: $\kappa = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|/|\mathbf{r}'|^3$, és $\mathbf{N}$ az $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'$ normáltja. Itt $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{r}'(t_0) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{r}''(t_0) = (0, -1, 0)$, $\kappa = 1$, $R = 1/\kappa = 1$, $\mathbf{N} = (0, -1, 0)$, a kör középpontja $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$, és az egyenlete $(x - \frac{\pi}{2})^2 + y^2 = 1$.*

2. Határozzuk meg az $\mathbf{r} = (2t, t^2 - 5, t^3)$ görbe simulósíkját a $t = 1$ paraméterű pontban.

Megoldás: *$\mathbf{r}'(1) = (2, 2, 3)$, $\mathbf{r}''(1) = (0, 2, 6)$, $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (6, -12, 4)$, a simulósík normálvektora ezzel párhuzamos, pl. $(3, -6, 2)$, egy pontja pedig az $\mathbf{r}(1) = (2, -4, 1)$ helyvektorú pont. A sík egyenlete: $3x - 6y + 2z = 32$.*

3. Határozzuk meg az $\mathbf{r} = (2\cos t, 2\sin t, t)$ csavarvonal simulókörét a $t = 0$ paraméterértékhez tartozó pontban.

Megoldás: *A $t = 0$ helyen $\mathbf{r} = (2, 0, 0)$, $\mathbf{r}' = (0, 2, 1)$, $\mathbf{r}'' = (-2, 0, 0)$, $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (0, -2, 4)$. A simulósík egyenlete: $y = 2z$, a görbület $\kappa = \frac{2}{5}$, a simulókör sugara $\frac{5}{2}$, $\mathbf{N} = (-1, 0, 0)$, a kör középpontja $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$. Tehát a simulókör az $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = \frac{25}{4}$ gömb és az $y = 2z$ sík metszetgörbéje. Paraméterezve: $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2} + 5\cos t, \frac{\sqrt{5}}{2}\sin t, \frac{\sqrt{5}}{2}\sin t)$.*

4. Írjuk fel az $\mathbf{r}(t) = (4\cos\frac{s}{5}, \frac{12}{5}\sin\frac{s}{5} - \frac{12}{25}s, \frac{16}{5}\sin\frac{s}{5} + \frac{9}{25}s)$ ívhosszparaméteres görbe torzióját a $\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds}\mathbf{N}$ definíció alapján.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= (-\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{12}{25}\cos\frac{s}{5} - \frac{12}{25}, \frac{16}{25}\cos\frac{s}{5} + \frac{9}{25}) = \mathbf{T} \\
\mathbf{r}'' &= (-\frac{4}{25}\cos\frac{s}{5}, -\frac{12}{125}\sin\frac{s}{5}, -\frac{16}{125}\sin\frac{s}{5}),\ |\mathbf{r}''| = \frac{4}{25} \\
\mathbf{N} &= (-\cos\frac{s}{5}, -\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}, -\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5}) \\
\mathbf{B} &= \mathbf{T} \times \mathbf{N} = (\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}, -\frac{16}{25} - \frac{9}{25}\cos\frac{s}{5}, \frac{12}{25} - \frac{12}{25}\cos\frac{s}{5}) \\
\frac{d\mathbf{B}}{ds} &= (\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5}, \frac{9}{125}\sin\frac{s}{5}, \frac{12}{125}\sin\frac{s}{5}) \\
\tau &= \frac{3}{25}
\end{aligned}$$

5. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (2t, t^2 - 5, t^3)$ görbe torzióját a $t = 0$ paraméterű pontban.

Megoldás: *A $\tau = \mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}'''/|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2$ képletet használjuk. Az adott helyen $\mathbf{r}' = (2, 0, 0)$, $\mathbf{r}'' = (0, 2, 0)$, $\mathbf{r}''' = (0, 0, 6)$, és ezekből $\tau = \frac{24}{4^2} = \frac{3}{2}$.*

6. Bontsuk fel a $\mathbf{r} = (t + 1, 2t, t^2)$ mozgásgörbe $t = 1$ időpontban vett gyorsulásvektorát pályairányú és a pályára merőleges komponensekre (azaz $\mathbf{a} = a_t\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$).

Megoldás: $\mathbf{r}(t) = (1, 2, 2t)$, $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{4t^2 + 5}$, $\frac{d}{dt}|\mathbf{v}(t)| = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+5}}$, $a_T = \frac{4}{3}$, $\mathbf{r}'' = (0, 0, 2)$, $\mathbf{r}'(1) \times \mathbf{r}''(1) = (4, -2, 0)$, $\kappa = |(4, -2, 0)|/|(1, 2, 2)|^3 = \frac{2\sqrt{5}}{27}$, $a_N = \kappa \cdot |\mathbf{v}|^2 = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. *Tehát $\mathbf{a} = \frac{4}{3}\mathbf{T} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\mathbf{N}$. (Ellenőrizhetjük: $T = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$, és $N = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2, -4, 5)$ behelyettesítésével.*

7. Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbf{r}(t) = (2t^2, 3t^2 + t + 1, 2t - 5)$ görbe síkgörbe.

Megoldás: $\mathbf{r}''' \equiv 0$, *így* $\tau \equiv 0$. *De abból is látszik, hogy az* $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ *vektor, amely a simulósík normálvektora, mindig egyirányú (sőt, egyenlő):* $(-12, 8, -4)$. *Harmadik megoldásként meg is kereshetjük azokat az* A, B, C, D *paramétereket, amelyekkel az* $\mathbf{r}(t)$ *komponensei kielégítik az* $Ax + By + Cz = D$ *egyenletet: a görbe síkja:* $3x - 2y + z = -7$.

Gyakorló feladatok

1. Adjuk meg a $\mathbf{r}(t) = (t^3/3, t^2/2)$ görbe simulókörének egyenletét a $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ pontban!

2. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (1-2t^2, t^2-2, \frac{1}{t})$ görbe görbületét és torzióját a $t = -1$ pontban.

3. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r} = (2 + t - t^3, 2t^3 + t^2, t^2 + 2t + 5)$ görbe síkgörbe.

4. Az $\mathbf{r}(t) = (3t + 1, 2t^3, 3t^2 - 3)$ görbére adjuk meg a $t_0 = 1$ pontban a $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ és $\mathbf{B}$ egységvektorokat, továbbá a simulósík egyenletét, és a torziót.

5. Egy pont egy görbe útvonalon halad, és a t_0 időpontban a sebességvektora $(1, -2, 1)$. Ha tudjuk azt is, hogy az adott pontban a görbe görbülete 2, binormálisa pedig $(2, 1, 0)$, határozzuk meg a pont gyorsulásvektorának a pályára merőleges komponensét!

Megoldások

1. Az adott pont a $t = 1$ paraméterértéknél van, és itt: $\mathbf{r}' = (1, 1, 0)$, $\mathbf{r}'' = (2, 1, 0)$, $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (0, 0, -1)$, $\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}' = (1, -1, 0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. Ezekből a kör sugara $2\sqrt{2}$, középpontja pedig $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0) + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = (\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}, 0)$, tehát a kör egyenlete a $z = 0$ síkban: $(x - \frac{7}{3})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 8$.

2. A $t = -1$-ben: $\mathbf{r}' = (4, -2, -1)$, $\mathbf{r}'' = (-4, 2, -2)$, $\mathbf{r}''' = (0, 0, -6)$, $\kappa = \frac{2\sqrt{5}}{7\sqrt{21}}$, $\tau = 0$ (az utóbbi onnan is látszik, hogy a görbe rajta van az $x + 2y = -3$ síkon).

3. $\mathbf{r}' = (1 - 3t^2, 6t^2 + 2t, 2t + 2)$, $\mathbf{r}'' = (-6t, 12t + 2, 2)$, $\mathbf{r}''' = (-6, 12, 0)$, és ebből $\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''' = 0$, tehát $\tau = 0$. (Másképp: kiszámítható, hogy $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (-12t^2 - 24t - 4, -6t^2 - 12t - 2, 6t^2 + 12t + 2) = (6t^2 + 12t + 2) \cdot (-2, -1, 1)$ mindig azonos irányú, illetve, hogy a görbe a $2x + y - z = -1$ síkban fekszik.)

4. $\mathbf{r}'(1) = 3 \cdot (1, 2, 2)$, $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''(1) = 18 \cdot (-2, -1, 2)$, $(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}' = 162 \cdot (-2, 2, -1)$, és $\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}$ ezek normáltjai: $\mathbf{T} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{3}(-2, -1, 2)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$. A simulósík egyenlete: $2x + y - 2z = 10$, a torzió $\frac{-2}{27}$.

5. $a_N = \kappa \cdot |\mathbf{v}|^2 = 2 \cdot 6 = 12$, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0) \times \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -2, -5)$, így $a_N\mathbf{N} = \frac{12}{\sqrt{30}}(1, -2, -5)$.