Órai feladatok

1. Számítsuk ki az $f(\mathbf{r}) = xy + xz$ függvény integrálját az $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^2 + 1)$ görbe mentén $t_1 = 0$-tól $t_2 = 1$-ig!

Megoldás: $\int\limits_0^1 t(1 + 2t^2)\sqrt{1 + 8t^2}\, dt = 2,325$ *($u = 1 + 8t^2$ helyettesítéssel).*

2. Számítsuk ki az $f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$ függvény integrálját a $\mathbf{r} = (2\cos\frac{s}{2}, 1 + 2\sin\frac{s}{2})$ ívhossz-paraméteresen megadott görbén a 0 és π paraméterértékek között!

Megoldás: $\int\limits_0^\pi 5 + 4\sin\frac{s}{2}\, ds = 5\pi + 8.$

3. Számítsuk ki a $\int\limits_{\mathcal{G}} x + y + z\, ds$ integrál értékét, ha $\mathcal{G}$ az $A(1, 2, 3)$ és $B(0, -1, 1)$ pontokat összekötő szakasz!

Megoldás: $\mathbf{r}(t) = (1-t, 2-3t, 3-2t)$, *ahol* $0 \le t \le 1$, *és* $\int\limits_{\mathcal{G}} x+y+z\, ds = \int\limits_0^1 (6-6t)\sqrt{14}\, dt = 3\sqrt{14}.$

4. Egy változó vastagságú hajlított rúd tömegközéppontját szeretnénk meghatározni. A keresztmetszetek középpontját összekötő görbe $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (0, t^2 - 1, 2t)$, ahol $-1 \le t \le 1$. A középpontokra koncentrált sűrűséget ($dm/d\ell$ értelemben, ahol Δm a $\Delta\ell$ hosszúságú rúddarab tömege), a $\rho(x, y, z) = 15\sqrt{y + 2}$ függvény adja meg. Adjuk meg a tömegközéppont koordinátáit!

Megoldás: $M = \int\limits_{\mathcal{G}} \rho\, ds = \int\limits_{-1}^1 30(1 + t^2)\, dt = 80$ *a tömeg,* $M_x = \int\limits_{\mathcal{G}} x\rho\, ds = 0$, $M_y = \int\limits_{\mathcal{G}} y\rho\, ds = \frac{3}{5}$, $M_z = \int\limits_{\mathcal{G}} z\rho\, ds = 0$, *amiből a tömegközéppont koordinátái* $\bar{x} = M_x/M = 0$, $\bar{y} = M_y/M = \frac{3}{5}$ *és* $\bar{z} = M_z/M = 0$.

5. Határozzuk meg az $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, x^2, y)$ vektorértékű függvény integrálját az $\mathbf{r}(t) = (1, 3t, 4t)$ görbe mentén a $t_1 = 0$-tól $t_1 = 1$-ig!

Megoldás: $\int_0^1 3 + 12t\, dt = 9.$

6. Számítsuk ki az $(x, y) \mapsto (-y, x)$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körön pozitív irányítás mellett!

Megoldás: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\int\limits_{\mathcal{G}} \mathbf{F}\, \mathbf{dr} = \int\limits_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$

7. Keressünk potenciálfüggvényt az $\mathbf{F} = (y + z, x + z, x + y)$ vektorértékű függvényhez, és számítsuk ki az $\mathbf{F}$ integrálját az $\mathbf{r}(t) = (\frac{t}{t+1}, \sqrt{t^2 + 1}, 1+t)$ görbén a 0 és 1 paraméterértékek között!

Megoldás: *Az* $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ *potenciálfüggvény, és az integrál értéke* $[f(\mathbf{r})]_A^B = f(B) - f(A)$, *ahol* $A = \mathbf{r}(0) = (0, 1, 1)$, $B = \mathbf{r}(1) = (1/2, \sqrt{2}, 2)$, *és ebből az integrál* $5\sqrt{2}/2$.

8. Van-e potenciálfüggvénye az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (xy, x + y, xz)$ függvénynek?

Megoldás: *Nincs. Például mert ha $f'_x = xy$, akkor $f = \frac{1}{2}x^2y + g(y,z)$ valamely kétváltozós $g(y,z)$ függvényre, és így $f'_y = \frac{1}{2}x^2 + g'_y(y,z) = x + y$ ellentmondást ad ($g'_y(y,z) = x - \frac{1}{2}x^2 + y$ függ x-től). Másképp:* $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (0, -z, 1-x) \not\equiv \mathbf{0}$.

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az $\int\limits_{\mathcal{G}} x - 1\,ds$ integrált a $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, 1)$ görbén $t_0 = 0$-tól $t_1 = 3$-ig!

2. Mennyi az $\int\limits_{\mathcal{G}} f\,ds$ integrál értéke, ha $f(x,y) = x^2 - y^2$, és $\mathcal{G}$ az $x^2 + y^2 = 4$ kör $(2,0)$-tól $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$-ig tartó íve?

3. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ függvény gradiensét!

4. Számítsuk ki az $\mathbf{F} = \left(\frac{1}{1+y}, x^2, y^2 - z\right)$ függvény integrálját a $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^4)$ $(0 \le t \le 1)$ görbén!

5. Határozzuk meg az $\mathbf{F} = e^{y+2z}(1, x, 2x)$ függvény potenciálfüggvényét, és számítsuk ki az integrálját az $(1,1,1)$ pontot a $(2,3,3)$ ponttal összekötő szakaszon!

Megoldások

1. $\int\limits_0^3 (t-1)\sqrt{t+1}\,dt = \frac{46}{15}$.

2. $\int\limits_0^{\pi/4} 8\cos^2 t - 8\sin^2 t\,dt = 4$.

3. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} + 2t^3\,dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

5. Egy potenciálfüggvény $f(x,y,z) = xe^{y+2z}$, az integrál pedig $2e^9 - e^3$.