Órai feladatok

1. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(\frac{xy}{z-2}, \frac{x^2}{y}, zy\right)$ függvény rotációját!

Megoldás: $\left(z, -\frac{xy}{(z-2)^2}, \frac{2x}{y} - \frac{x}{z-2}\right)$.

2. $\int\limits_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = ?$

Megoldás: *Az (yz, xz, xy) függvénynek van potenciálfüggvénye: xyz, így az integrál valóban csak a végpontoktól függ, és értéke -2.*

3. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{F}(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$ függvény egzakt, azaz van potenciálfüggvénye.

Megoldás: $\frac{\partial}{\partial y}2xy^3 = \frac{\partial}{\partial x}3x^2y^2 = 6xy^2$, *tehát egzakt. Másképp:* $\mathbf{F}$*-nek potenciálfüggvénye, az* $f(x, y) = x^2y^3$.

4. Paraméterezzük azt a kúppalástot, amelynek alapja az $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ kör, csúcsa pedig az $A(1, 2, 3)$ pont!

Megoldás: *Az alkotókat parméterezve t-vel, és indexelve a kör pontjaihoz tartozó paraméterértékkel:*

$$\mathbf{r}(t, \varphi) = (1, 2, 3) + t((\cos\varphi, \sin\varphi, 0) - (1, 2, 3)) = (1 - t - t\cos\varphi, 2 - 2t - t\sin\varphi, 3 - 3t),$$

ahol $0 \le t \le 1$ *és* $0 \le \varphi \le 2\pi$.

5. Adjuk meg az $\mathbf{r}(u, v) = \left(u^2 - v, \frac{u}{v+1}, v^3\right)$ felület érintősíkjának egyenletét az $u = 1, v = 0$ paraméterű helyen!

Megoldás: *A normálvektor* $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (2, 1, 0) \times (-1, -1, 0) = (0, 0, -1)$ *az adott pontban, az érintési pont koordinátái pedig* $\mathbf{r}(1, 0) = (1, 1, 0)$, *így a sík egyenlete* $z = 0$.

6. Adjuk meg a $z = 2x^2 + 3y^2$ felület normálvektorát az $(x, y) = (1, 1)$ értékekhez tartozó pontban!

Megoldás: $(-4, -6, 1)$.

7. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(u, v) = (u^2, 2u\cos v, 2u\sin v)$ felület $\{(u, v)\,|\,0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}\}$ paramétertartományhoz tartozó darabjának felszínét.

Megoldás: $\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^1 |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^1 4u\sqrt{1+u^2}\,du\,dv = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}\pi$

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a következő függvények rotációját:
a) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (x/y, y/z, xz)$ b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\ln|\mathbf{r}|$

2. Melyek egzaktak a következő függvények közül?
a) (x^2y+y^3, x^3-xy^2) b) $(2xy-z, x^2+z, y-x)$ c) (xy^2+2x, x^2y-y^2)

3. Számítsuk ki az $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx+(x^2-z^2)\,dy-2yz\,dz$ integrált!

4. Paraméterezzük a $z=y^2$ görbe y körüli forgatásával kapott felületet!

5. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(u,v)=(u, \cos u \sin v, \cos u \cos v)$ felület normálvektorát az $u_0=\frac{\pi}{4}$, $v_0=\frac{\pi}{3}$ paraméterértékekhez tartozó pontjában!

6. Adjuk meg az $xy^2+z^3=12$ felület érintősíkjának egyenletét a $P_0(1,2,2)$ pontban!

7. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(u,v)=(\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, u+v)$, $0\le u\le\pi$, $0\le v\le 1$ felületdarab felszínét!

Megoldások

1. a) $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}=(y/z^2, -z, x/y^2)$, b) $\mathbf{v}(\mathbf{r})=(x,y,z)\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=$
$=(\frac{x}{2}\ln(x^2+y^2+z^2), \frac{y}{2}\ln(x^2+y^2+z^2), \frac{z}{2}\ln(x^2+y^2+z^2))$, és $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

2. a) Nem egzakt: $\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+y^3)=x^2+3y^2$, $\frac{\partial}{\partial x}(x^3-xy^2)=3x^2-y^2$ nem egyenlők.
b) Egzakt, a rotációja $\mathbf{0}$ (potenciálfüggvénye $x^2y-xz+yz$).
c) Egzakt: $\frac{\partial}{\partial y}(xy^2+2x)=2xy$ és $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y-y^2)=2xy$ egyenlők. (Másképp: potenciálfüggvénye $\frac{1}{2}x^2y^2+x^2-\frac{1}{3}y^3$.)

3. $[x^2y-yz^2]_{(0,0,0)}^{(1,2,3)}=-16$

4. $\mathbf{r}(y,\varphi)=(y^2\sin\varphi, y, y^2\cos\varphi)$, $y\in\mathbb{R}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

5. $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$

6. $\nabla(xy^2+z^3-12)=(y^2, 2xy, 3z^2)$, így az érintősík normálvektora $(4,4,12)$, vagy az ezzel párhuzamos $(1,1,3)$, és a sík egyenlete $x+y+3z=9$.

7. $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=(-v\sin u, v\cos u, -v)$, $|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|=v\sqrt{2}$, a felszín $\pi/\sqrt{2}$.