Órai feladatok

1. Számítsuk ki az $\mathbf{F} = (xz, xy, yz)$ függvény integrálját a $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ felület és a $z = 0$ sík által határolt tartomány felületén, befelé mutató normálvektorokkal!

Megoldás: *Gauss-Osztrogradszkij-tétellel.* $\operatorname{div}\mathbf{F} = z + x + y$, *az integrál értéke pedig* $-\iiint z + x + y \, dx\, dy\, dz$ *az origó körüli* 1 *sugarú gömb felső felén. Polárkoordinátákra áttérve ez*

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\cos\varphi + r\sin\varphi\cos\vartheta + r\sin\varphi\sin\vartheta) r^2 \sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\vartheta = -\frac{\pi}{4}.$$

2. Számítsuk ki az $\mathbf{F} = (y^2, z^2, x^2)$ függvény integrálját az $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ és $C(0,0,1)$, majd újra A pontokon keresztülhaladó zárt törtvonal mentén!

Megoldás: *Stokes-tétellel.* $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (y^2, z^2, x^2) = (-2z, -2x, -2y)$. *A kiszámítandó integrál értéke megegyezik* $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$*-nek az* ABC *háromszöglapon való felületmenti integráljával, felfelé mutató normálvektorokkal. Ezt kiszámíthatjuk a felületet megadó* $g(x, y, z) = x+y+z = 1$ *egyenlet alapján a* $\iint\limits_H \frac{\nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} \, dx\, dy$ *integrállal, ahol* H *az* ABC *háromszöglap vetülete az* xy*-síkra, azaz a* $(0,0), (1,0), (0,1)$ *csúcsú háromszöglap,* $\mathbf{p} = (0,0,1)$, *és* $\nabla g = (1,1,1)$ *valóban felfelé mutat, tehát nem kell a negatívját venni. Az eredmény*

$$\iint\limits_H (-2 + 2x + 2y, -2x, -2y)(1,1,1)\, dy\, dx = \iint\limits_H -2\, dy\, dx = -2 \cdot T_H = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

3. Írjuk fel az $f(z) = z^2 + \frac{1}{z}$ komplex függvényt $f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$ alakban.

Megoldás: $f(x + yi = x^2 - y^2 + \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\Big(2xy - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\Big)$

4. Adjuk meg az $e^{5+\frac{\pi}{2}i}$ értékét algebrai alakban!

Megoldás: $e^5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = e^5 i$

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, x + y, x + y + z)$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ egyenletekkel meghatározott körvonalon, pozitív irányban Stokes-tétellel és anélkül!

2. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^3, y^3, z^3)$ függvény integrálját az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű gömbfelületen, befelé mutató normálvektorokkal!

3. Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (xe^z, ze^x, ye^y)$ függvény integrálját a $3z^2 = x^2 + y^2$ kúp felső térfélbe eső része és az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ gömb által határolt térbeli tartomány teljes felületén kifelé mutató normálvektorokkal!

4. Írjuk fel az $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ komplex függvényt $u(x, y) + iv(x, y)$ alakban!

5. Adjuk meg az $e^{1-i\arcsin(1/3)}$ értékét algebrai alakban!

Megoldások

1. 4π

2. $-\frac{12\pi}{5}$

3. $\operatorname{div}\mathbf{F} = e^z$, ennek az integrálja a megadott tartományon — henger- vagy gömbi koordinátákra áttérve — $2\pi(e^2+3)$.

4. $\dfrac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + i\dfrac{-2y}{(x-1)^2+y^2}$

5. $\dfrac{2\sqrt{2}e}{3} - \dfrac{e}{3}i$