Órai feladatok

1. Számítsuk ki a következő függvényértékeket!
a) $\cos(-i)$ b) $\sin(1+2i)$

Megoldás: *a)* $\operatorname{ch} 1 = \dfrac{e+\frac{1}{e}}{2}$. *b)* $\operatorname{ch} 2 \sin 1 + i \operatorname{sh} 2 \cos 1$.

2. Adjuk meg a $-5+5i$ komplex szám összes logaritmusát, és a logaritmus főértékét!

Megoldás: $\ln(5\sqrt{2}) + i\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, *a főérték pedig* $\ln(5\sqrt{2}) + i\dfrac{3\pi}{4}$.

3. Oldjuk meg a $\sin z = -2$ egyenletet!

Megoldás: *A* $\sin z$ *függvényt kifejezve* sh*-val, a következő egyenletet kapjuk:* $(e^{iz} - e^{-iz})/2i = -2$, *azaz* $(e^{iz})^2 + 4ie^{iz} - 1 = 0$. *A másodfokú egyenlet megoldása után logaritmusszamítással megkapjuk* iz *értékét, és ebből* $z = (2k+1)\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$.

4. Oldjuk meg a $\operatorname{tg} z = -i$ egyenletet!

Megoldás: *Az előbbihez hasonló módon visszavezethető az* $e^{iz} - e^{-iz} = e^{iz} + e^{-iz}$ *egyenletre, amiből* $e^{-iz} = 0$, *de az exponenciális függvény nem veszi fel a* 0 *értéket, így az egyenletnek nincs megoldása.*

5. Számítsuk ki a következő hatványokat!
a) i^i b) $(i+1)^i$

Megoldás: *a)* $i^i = e^{i\ln i} = e^{-\pi/2-2k\pi}$, *ahol* $k \in \mathbb{Z}$
b) $(i+1)^i = e^{i\ln(i+1)} = e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}(\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2}))$.

6. A következő függvények közül melyik hol folytonos, és hol differenciálható?
a) $f(z) = \dfrac{z^2+z}{z-i}$ b) $g(z) = z^2\bar{z}$ c) $h(z) = \varphi$, ahol φ a z szöge, $0 \le \varphi < 2\pi$

Megoldás: *a) Mivel* $f(z)$ *differenciálható függvényekből van összerakva az alapműveletek segítségével, mindenhol differenciálható, és így persze folytonos is, ahol értelmezve van, azaz* $\mathbb{C} \setminus \{\, i \,\}$*-ben.*
b) $g(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$, *ahol* $x, y \in \mathbb{R}$, $u(x,y) = x^3 + xy^2$, $v(x,y) = x^2y + y^3$. *A folytonosság is visszavezethető az* u *és* v *folytonosságára, ugyanis* $x + yi \to x_0 + y_0 i \Leftrightarrow x \to x_0$ *és* $y \to y_0$. *Emiatt* $g(z)$ *folytonos, mivel* u *és* v *kétváltozós polinomok. Viszont a Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek erre az* u*-ra és* v*-re azt adják, hogy* $3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2$ *és* $2xy = -2xy$ *kell a differenciálhatósághoz, tehát* g *csak a* $z = 0$ *helyen differenciálható.*
c) $h(z)$ *nincs értelmezve* $z = 0$*-ban, és nem folytonos a pozitív* x *tengely mentén ("fölülről"* 0*, "alulról"* 2π *a függvény limesze egy pozitív valós helyen). Mindenütt máshol folytonos.*

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a következő kifejezések értékeit!
a) $\operatorname{ch}(\ln 3 + i \cdot \frac{\pi}{4})$ b) $\operatorname{tg}(i \ln 2)$ c) $\ln(-e)$. d) $\ln(\sqrt{3} + i)$

2. Oldjuk meg a $\operatorname{tg} z = 1 + \sqrt{2}i$ egyenletet!

3. Számítsuk ki a következő hatványokat!

a) 2^{5i} b) $i^{1/2}$

4. Hol differenciálható az $f(z) = \cos \bar{z}$ komplex függvény?

Megoldások

1. a) $\dfrac{5\sqrt{2}}{6} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}i$ b) $\dfrac{1+e^4}{1-e^4}i$ c) $1 + (2k+1)i$ d) $\ln 2 + (\frac{\pi}{6} + 2k\pi)i$

2. A $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{-i \operatorname{sh} iz}{\operatorname{ch} iz}$ átalakítás az $e^{2iz} = \dfrac{-\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}+1-i}$ egyenletre vezet, és ebből $z = (\frac{3\pi}{8} + k\pi) + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})i$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

3. a) $\cos(5\ln 2) + i\sin(5\ln 2)$ b) $i^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln i} = e^{(k\pi + \frac{\pi}{4})i} = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$.

4. A Cauchy–Riemann-differenciálegyenletek alapján $f(z)$ akkor és csak akkor differenciálható, ha $\sin x \operatorname{ch} y = 0$ és $\cos x \operatorname{sh} y = 0$, ami csak $z = 0$-ra igaz.