Órai feladatok

1. Számítsuk ki az $iz^2 - 2\bar{z}$ függvény integrálját a $|z| = 2$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ $(\pi/2 \geq t \geq 0)$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ görbe mentén, a kör negatív irányítása szerint!

Megoldás: *$z(t) = 2e^{it}$ a görbe, $z'(t) = 2ie^{it}$, $iz(t)^2 - 2\overline{z(t)} = 4ie^{2it} - 4e^{-it}$, az integrál* $\int\limits_{\pi/2}^{0} -8e^{3it} - 8i\,dt = -\frac{8}{3} + (\frac{8}{3} + 4\pi)i.$

2. Számítsuk ki a $3z^2 + 2z$ függvény integrálját az $1-i$, $2-i$, $2+i$ pontokat összekötő törtvonalon!

Megoldás: *$3z^2 + 2z$-nek van primitív függvénye: $z^3 + z^2$, így az integrál $[z^3 + z^2]_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i$.*

3. $\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{z^2 + iz}\,dz = ?$, ha $\mathcal{G}$ a $-i$ középpontú, $\frac{1}{2}$ sugarú kör, pozitív körüljárással.

Megoldás: *A szingularitások 0 és $-i$, de csak $-i$ van a körön belül. A Cauchy-féle integrálformula szerint az integrál* $\frac{2\pi i}{0!} \cdot \left.\frac{\cos z}{z}\right|_{z=-i} = -2\pi \operatorname{ch} 1.$

4. $\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5}\,dz = ?$, ha $\mathcal{G}$ egy origó középpontú kör, negatív körüljárással.

Megoldás: *Az egyetlen 0 szingularitás a kör belsejében van, és a kör negatív irányítású, így az integrál* $-\frac{2\pi i}{4!} \cdot \left.(\operatorname{ch} z)^{(4)}\right|_{z=0} = -\frac{\pi}{12} \cdot \operatorname{ch} 0 = -\frac{\pi}{12}$

5. $\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{1}{z(z^2-1)}\,dz = ?$, ha $\mathcal{G}:\ |z-1| = \frac{3}{2}$, pozitív irányban.

Megoldás: *A $0, \pm 1$ szingularitások közül 0 és 1 van a körben, így az integrált két, az adott szingularitások körüli integrál összegére bontjuk. 0 körül:* $\frac{2\pi i}{0!} \cdot \left.\frac{1}{z^2-1}\right|_{z=0} = -2\pi i$, *$1$ körül:* $\frac{2\pi i}{0!} \cdot \left.\frac{1}{z(z+1)}\right|_{z=1} = \pi i$, *így az összeg $-\pi i$.*

6. $\oint\limits_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2(z+1)}\,dz = ?$, ha $\mathcal{G}$ a $-2, 1+2i, 1-2i$ csúcsú háromszögvonal.

Megoldás: *Szingularitások az i és a -1, mindkettő a háromszögön belül van. Az integrál* $\frac{2\pi i}{1!} \cdot \left.\left(\frac{e^{\pi z}}{z+1}\right)'\right|_{z=i} + \frac{2\pi i}{0!} \cdot \left.\frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}\right|_{z=-1} = \pi - \pi^2 + \pi e^{-\pi} - \pi^2 i$

Gyakorló feladatok

1. $\int\limits_{\mathcal{G}} \operatorname{Re}(z + z^2)\,dz = ?$, ha $\mathcal{G}$ a $y = x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ egyenletű parabola a komplex síkon, és az irány az x növekedésének iránya.

2. $\int\limits_{\mathcal{G}} \frac{z+2}{z}\,dz = ?$, ahol $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ körív, pozitív forgásiránnyal.

3. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\, dz = ?$, ahol$\mathcal{G}$ a $|z-2| = 3$ egyenletű kör, pozitív irányban.

4. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{1}{1+z^2}\, dz = ?$, ha $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$ egyenletű kör, pozitív irányban.

5. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi i}{2})^3}\, dz = ?$, ahol $\mathcal{G}$ a $|z-1| + z + 1| = 4$ egyenletű ellipszis, pozitív irányban.

Megoldások

1. $z(t) = t + 2t^2 i$ $(0 \le t \le 1)$, $z'(t) = 1 + 4ti$, $\mathrm{Re}(z(t) + z(t)^2) = t + t^2 - 4t^4$,
$\int_0^1 (1+4ti)(t + t^2 - 4t^4)\, dt = \frac{1}{30} - \frac{1}{3} i.$

2. $z(t) = 2e^{it}$ $(\pi \le t \le 2t)$, $\int_\pi^{2\pi} (1 + e^{-it})(2ie^{it})\, dt = 4 + 2\pi i.$

3. Szingularitások: 0, 1, mindkettő a görbén belül van. Az integrál: $\displaystyle\frac{2\pi i}{2!} \cdot \left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\Big|_{z=0} + \frac{2\pi i}{0!} \cdot \frac{e^z}{z^3}\Big|_{z=1} = \pi(2e-5)i.$

4. A szingularitások $\pm i$, mindkettő a görbén belül. Az integrál: $\displaystyle\frac{2\pi i}{0!} \cdot \frac{1}{z+i}\Big|_{z=i} + \frac{2\pi i}{0!} \cdot \frac{1}{z-i}\Big|_{z=-i} = \pi - \pi = 0.$

5. $|\frac{\pi i}{2} - 1| + |\frac{\pi i}{2} + 1| = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1} < 4$, tehát a szingularitás az ellipszisen belül van. Az integrál: $\displaystyle\frac{2\pi i}{2!} (\sin z)''\Big|_{z=\frac{\pi i}{2}} = \pi \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}.$