Órai feladatok

1. Oldjuk meg a $(2x+1)y' - 3y = 0$ differenciálegyenletet, és határozzuk meg az $y(4) = 6$ feltételt kielégítő partikuláris megoldását1

Megoldás: *Az egyenlet szétválasztható. Az általános megoldás* $y = A \cdot |2x+1|^{3/2}$, *a partikuláris* $y = \frac{2}{9}(2x+1)^{3/2}$.

2. Oldjuk meg a $\sqrt{1-x^2}y' + xy = 0$ differerenciálegyenletet az $y(\frac{1}{2}) = 0$, illetve az $y(\frac{3}{5}) = 1$ kezdeti feltétellel.

Megoldás: *Az általános megoldás* $A \cdot e^{\sqrt{1-x^2}}$, *a két partikuláris megoldás* $y = 0$ *és* $y = e^{-\frac{4}{5}+\sqrt{1-x^2}}$.

3. Oldjuk meg az $e^y + (xe^y - 2y)y' = 0, \quad y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát!

Megoldás: *A differenciálegyenlet egzakt, általános megoldása* $xe^y - y^2 = C$. *Az* $x = 1$, $y = 0$ *értékek behelyettesítésével azt kapjuk, hogy* $C = 1$, *tehát a kezdetiérték-probléma megoldása:* $xe^y - y^2 = 1$.

4. Oldjuk meg az $y + (ye^x - 1)y' = 0, \quad y(0) = 2$ kezdetiérték-problémát!

Megoldás: *Az egyenlet egzakttá tehető az* $m(x) = e^{-x}$ *multiplikátorral. Az általános megoldása* $-e^{-x}y + \frac{1}{2}y^2 = C$, *a kezdeti érték miatt* $C = 0$, *így a partikuláris megoldás a* $-e^{-x}y + \frac{1}{2}y^2 = 0$ *implicit egyenlettel adható meg. De az* $y = 0$ *függvény nem elégíti ki a kezdeti feltételt, tehát egyszerűsíthetjük az egyenletet, és* y*-t kifejezve:* $y = 2e^{-x}$.

5. Adjuk meg az $y' = \frac{1}{x}y + x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: *Az* $\frac{1}{x}y + x^2 - y' = 0$ *egyenlet egzakttá tehető az* $m(x) = \frac{1}{x}$ *multiplikátorral. A megoldása:* $y = \frac{1}{2}x^3 - Cx$.

Gyakorló feladatok

1. $(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$

2. $xyy' + y^2 - 1 = 0$

3. $\frac{1}{x} + y + (\frac{1}{y} + x)y' = 0, \quad y(\frac{1}{2}) = 2$

4. $\dfrac{y\sin x - 1}{\cos x} + y' = 0$

5. $e^{-y} + (xe^{-y} - 2ye^{-2y})y' = 0$

6. $xy' - y = x^3 + 1, \quad y(2) = 5$

Megoldások

1. $y = \mathrm{tg}(C - \frac{1}{2}\ln(1+x^2))$

2. $y = \pm\sqrt{1 - \dfrac{A}{x^2}}$

3. $\ln xy = 1 - xy$

4. $y = \sin x + C\cos x$

5. $xe^y - y^2 = C$

6. $y = \frac{1}{2}x^3 + x - 1$