Órai feladatok

1. Milyen görbét írnak le a következő függvények?
a) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ t)$;
b) $\mathbf{r}(t) = (t^2,\ 2 + t^2,\ 1 - 4t^2)$.

(Csavarvonal és félegyenes.)

2. (Térbeli kör leírása) Paraméterezzük az $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ és az $x + 2y = 0$ felületek metszetgörbéjét.

($\mathbf{r}(t) = (-\frac{4}{\sqrt{5}}\cos t,\ \frac{2}{\sqrt{5}}\cos t,\ 2\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.)

3. Számítsuk ki a határértékeket! Vizsgáljuk meg a vektorfüggvények folytonosságát is!

a) $\lim\limits_{t\to 0}(t^2,\ \frac{\sin t}{t},\ 1)$ b) $\lim\limits_{t\to 3}(e^{\frac{1}{t-3}},\ t^3,\ t)$

(a) $(1, 1, 1)$ b) nincs limesze, de balról $t \to 3^-$ esetén $(0, 27, 3)$-hoz, $t \to 3^+$ esetén $(+\infty, 27, 3)$-hoz tart. Az adott helyen mindegyiknek szakadása van, de mindenhol máshol folytonos.)

4. Számítsuk ki az 1. feladat paraméterezett görbéire a sebességvektorokat és a görbementi sebességet.

(a) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 1)$, $|\dot{\mathbf{r}(t)}| = \sqrt{5}$; b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = 2t(1, 1, -4)$, $|\dot{\mathbf{r}(t)}| = 6\sqrt{2}|t|$.)

5. Milyen görbét ír le az $\mathbf{r}(t) = (t^3,\ \sqrt{t^6})$ paraméterezés? Differenciálható-e az $\mathbf{r}(t)$ függvény a $t = 0$ pontban? Van-e ott a görbének érintője?

(Az $y = |x|$ görbét írja le. A függvény mindenütt differenciálható, 0-ban a deriváltvektora $\mathbf{0}$, de itt nincs érintője a görbének.)

6. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \left(t^2,\ \dfrac{t+1}{t},\ \dfrac{t}{t+1}\right)$ görbe érintőegyenesének egyenletrendszerét a $t_0 = 1$ paraméterű pontban.

($x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t$.)

7. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t)$ függvényt, ha tudjuk, hogy $\dot{\mathbf{r}}(t) = (t^3 + 4t,\ t,\ 2t^2)$, és $\mathbf{r}(0) = (1, 1, 0)$.

($\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{4}t^4 + 2t^2 + 1,\ \frac{1}{2}t^2 + 1,\ \frac{2}{3}t^3)$.)

8. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\sin t,\ \sin t - t\cos t,\ t)$ görbe ívhosszát a $0 \le t \le 1$ szakaszon!

(Az ívhossz: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arsh} t + \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{arsh} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$ *Az integrál kiszámításánál $t = \operatorname{sh} u$ helyettesítést használunk, és a $\operatorname{ch}^2 u$ kiintegrálásánál a $\operatorname{ch}^2 u = (1 + \operatorname{ch} 2u)/2$ linearizáló formulát.)*

9. Térjünk át ívhosszparaméterre az $\mathbf{r}(t) = (1,\ t,\ \frac{2}{3}\sqrt{t^3})$, $0 \le t \le 3$ görbénél.

(Az $s = \int_0^t \sqrt{1+\tau}\,d\tau = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} - \frac{2}{3}$ összefüggésből $t = (\frac{3}{2}s + 1)^{2/3} - 1$, és ezt az $\mathbf{r}(t)$ képletébe helyettesítve:

$$\mathbf{r} = \left(1,\ (\tfrac{3}{2}s+1)^{2/3} - 1,\ \tfrac{2}{3}\big((\tfrac{3}{2}s+1)^{2/3} - 1\big)^{3/2}\right).\ )$$

Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r} = (3-t,\ t^2-4,\ 2t-2)$ síkgörbe, és adjuk meg a görbét tartalmazó sík egyenletét. (Útmutatás: keressük meg azokat az A, B, C, D paramétereket, amelyekre a görbe pontjai kielégítik az $Ax + By + Cz = D$ egyenletet.)

2. Paraméterezzük az $x^2 + y^2 = z^2$ és az $x + y + z = 1$ felületek metszetgörbéjét!

3. Adjuk meg az $\mathbf{r} = \left(\dfrac{1}{1-t},\ \ln(1+t^2),\ e^{-t}\right)$ görbe érintőjének egyenletrendszerét a $t_0 = 2$ paraméterű pontban.

4. Adjuk meg azt az $\mathbf{r}(t)$ vektorértékű függvényt, amelyre $\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(\dfrac{3}{2}(t+1)^{1/2},\ e^{-t},\ \dfrac{1}{1+t}\right)$, és $\mathbf{r}(0) = (0,0,1)$.

5. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t)$ görbét, ha $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (6t,\ 12t^2,\ 2)$, $\mathbf{r}(0) = (1,0,0)$ és $\dot{\mathbf{r}}(0) = (0,1,1)$.

6. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \left(t+1, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{2\sqrt{2t^3}}{3}\right)$ görbe ívhosszát a -2 és 0 paraméterű pontok között.

7. Térjünk át ívhosszparaméterre az $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t,\ \sin^3 t,\ \cos 2t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ görbénél!

Eredmények

1. $2x + z = 4$.
2. $\mathbf{r}(t) = (t, 1 + \dfrac{1}{2t-2}, -t - \dfrac{1}{2t-2})$ (hiperbola, amely kúp és sík metszeteként állt elő).
3. $x = -1 + t$, $y = \ln 5 + \frac{4}{5}t$, $z = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^2}t$.
4. $\mathbf{r}(t) = \big((t+1)^{3/2} - 1, -e^{-t} + 1, \ln(1+t) + 1\big)$, $t > -1$.
5. $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t^2, 4t^3 + 1, 2t + 1)$, $\mathbf{r}(t) = (t^3 + 1, t^4 + t, t^2 + t)$.
6. $\int\limits_{-2}^{0} |t+1|\, dt = 1$.
7. $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \frac{5}{2}\sin 2t$, $s = \int_0^t |\mathbf{r}'(\tau)|\, d\tau = -\frac{5}{4}\cos 2t + \frac{5}{4}$, $\cos 2t = 1 - \frac{4}{5}s$,
$\mathbf{r} = \Big((1 - \frac{2}{5}s)^{3/2}, (\frac{2}{5}s)^{3/2}, 1 - \frac{4}{5}s\Big)$.