Órai feladatok

1. Számítsuk ki a kísérő triédert, görbületet és torziót az

a) $\mathbf{r}(s) = (\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}})$ ívhosszparaméteres görbére $s = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$-nél, és az

b) $\mathbf{r}(t) = (t^4, \frac{4}{3}t^3, t^2)$ görbére $t = -1$-nél.

(a) $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{r}''(s) = (-\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{N}(s) = (-\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{B}(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = (\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0)$, *így* $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$*-ben* $\mathbf{T} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{N} = (0, -1, 0)$, $\mathbf{B} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\kappa = |\mathbf{r}''(\frac{\pi}{\sqrt{2}})| = \frac{1}{2}$, *és* $\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds}\mathbf{N} = \frac{1}{2}$.

b) $t = -1$*-ben* $\dot{\mathbf{r}} = (-4, 4, -2)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (12, -8, 2)$, $\dddot{\mathbf{r}} = (-24, 8, 0)$, $|\dot{\mathbf{r}}| = 6$, $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (-8, -16, -16)$, $|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = 24$, $\kappa = \dfrac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \dfrac{1}{9}$, $\tau = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}}\,\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2} = \dfrac{1}{9}$. *)*

2. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (2t, t^2 - 5, t^3)$ görbe simulósíkját és normálsíkját a $t = 1$ paraméterű pontban.

($\dot{\mathbf{r}}(1) = (2, 2, 3)$, $\ddot{\mathbf{r}}(1) = (0, 2, 6)$, $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (6, -12, 4)$, *a simulósík normálvektora ezzel párhuzamos, pl.* $(3, -6, 2)$, *egy pontja pedig az* $\mathbf{r}(1) = (2, -4, 1)$ *helyvektorú pont. A sík egyenlete:* $3x - 6y + 2z = 32$. *A normálsík normálvektora* $\dot{\mathbf{r}}(1) = (2, 2, 3)$, *és egyenlete* $2x + 2y + 3z = -1$. *)*

3. Adjuk meg az $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t)$ görbe $(\frac{\pi}{2}, 1)$ pontbeli simulókörének egyenletét! (Rajzoljuk le a görbét!)

(Tekinthetjük térbeli görbének: $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t, 0)$, *és így alkalmazhatók a térbeli képletek:* $\kappa = |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|/|\dot{\mathbf{r}}|^3$, *és* $\mathbf{N}$ *az* $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}$ *normáltja. Itt* $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = (1, 0, 0)$, $\ddot{\mathbf{r}}(t_0) = (0, -1, 0)$, $\kappa = 1$, $R = 1/\kappa = 1$, $\mathbf{N} = (0, -1, 0)$, *a kör középpontja* $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$, *és az egyenlete* $(x - \frac{\pi}{2})^2 + y^2 = 1$.*)*

4. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ csavarvonal simulókörét a $t = 0$ paraméterértékhez tartozó pontban.

(A $t = 0$ *helyen* $\mathbf{r} = (2, 0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}} = (0, 2, 1)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (-2, 0, 0)$, $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (0, -2, 4)$. *A simulósík egyenlete:* $y = 2z$, *a görbület* $\kappa = \frac{2}{5}$, *a simulókör sugara* $\frac{5}{2}$, $\mathbf{N} = (-1, 0, 0)$, *a kör középpontja* $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$. *Tehát a simulókör az* $(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = \frac{25}{4}$ *gömb és az* $y = 2z$ *sík metszetgörbéje. Paraméterezve:* $\mathbf{r}(t) = (-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cos t, \sqrt{5}\sin t, \frac{\sqrt{5}}{2}\sin t)$. *)*

5. Mekkora a $\mathbf{r}(t) = (t + 1, 2t, t^2)$ mozgásgörbe $t = 1$ időpontban vett gyorsulásvektorának a pályairányú és a pályára merőleges komponense?

($t = 1$*-ben* $\dot{\mathbf{r}} = (1, 2, 2)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (0, 0, 2)$, *így a gyorsulásvektor* $\dot{\mathbf{r}}$*-re vett vetülete* $\frac{\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^2}\dot{\mathbf{r}} = \frac{4}{9}(1, 2, 2)$, *és a kiegészítő összetevő* $(0, 0, 2) - \frac{4}{9}(1, 2, 2) = \frac{2}{9}(-2, -4, 5)$. *Tehát a pályairányú komponens hossza* $\frac{4}{3}$, *a pályára merőleges komponensé* $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Ha ismerjük (vagy más célra úgyis ki kell számítanunk) a görbületet, akkor az $a_T = \frac{d}{dt}v$ *és* $a_N = \kappa v^2$ *képletet is használhatjuk.* $\mathbf{r}(t) = (1, 2, 2t)$, $|\mathbf{v}(t)| = |\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{4t^2 + 5}$, $\frac{d}{dt}|\mathbf{v}(t)| = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+5}}$, $a_T = \frac{4}{3}$, $\ddot{\mathbf{r}} = (0, 0, 2)$, $\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1) = (4, -2, 0)$, $\kappa = |(4, -2, 0)|/|(1, 2, 2)|^3 = \frac{2\sqrt{5}}{27}$, $a_N = \kappa \cdot |\mathbf{v}|^2 = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. *Tehát* $\mathbf{a} = \frac{4}{3}\mathbf{T} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\mathbf{N}$. *(Ellenőrizhetjük* $T = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$, *és* $N = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2, -4, 5)$ *behelyettesítésével.)*

6. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r}(t) = (2t^2, 3t^2 + t + 1, 2t - 5)$ görbe síkgörbe.

($\dddot{\mathbf{r}} \equiv 0$, így $\tau \equiv 0$. De abból is látszik, hogy az $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$ vektor, amely a simulósík normálvektora, mindig egyirányú (sőt, egyenlő): $(-12, 8, -4)$. Harmadik megoldásként meg is kereshetjük azokat az A, B, C, D paramétereket, amelyekkel az $\mathbf{r}(t)$ komponensei kielégítik az $Ax + By + Cz = D$ egyenletet: a görbe síkja: $3x - 2y + z = -7$.)

Gyakorló feladatok

1. Adjuk meg az $\mathbf{r}(t) = (t^3/3, t^2/2)$ görbe simulókörének egyenletét az $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ pontban!

2. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = (1-2t^2, t^3-2, \frac{1}{t})$ görbe görbületét és torzióját a $t = -1$ pontban.

3. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{r}(t) = (2 + t - t^3, 2t^3 + t^2, t^2 + 2t + 5)$ görbe síkgörbe.

4. Az $\mathbf{r}(t) = (3t + 1, 2t^3, 3t^2 - 3)$ görbére adjuk meg a $t_0 = 1$ pontban a $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ és $\mathbf{B}$ egységvektorokat, továbbá a simulósík egyenletét, és a torziót.

5. Egy pont egy görbe útvonalon halad, és a t_0 időpontban a sebességvektora $(1, -2, 1)$. Ha tudjuk azt is, hogy az adott pontban a görbe görbülete 2, binormálisa pedig $(2, 1, 0)$, határozzuk meg a pont gyorsulásvektorának a pályára merőleges komponensét!

Megoldások

1. Az adott pont a $t = 1$ paraméterértéknél van, és itt: $\dot{\mathbf{r}} = (1, 1, 0)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (2, 1, 0)$, $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (0, 0, -1)$, $\kappa = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}} = (1, -1, 0)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$. Ezekből a kör sugara $2\sqrt{2}$, középpontja pedig $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0) + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = (\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}, 0)$, tehát a kör egyenlete a $z = 0$ síkban: $(x - \frac{7}{3})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = 8$.

2. A $t = -1$-ben: $\dot{\mathbf{r}} = (4, 3, -1)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (-4, -6, -2)$, $\dddot{\mathbf{r}} = (0, 6, -6)$, $\kappa = \frac{6\sqrt{3}}{13\sqrt{26}}$, $\tau = \frac{1}{3}$.

3. $\dot{\mathbf{r}} = (1-3t^2, 6t^2+2t, 2t+2)$, $\ddot{\mathbf{r}} = (-6t, 12t+2, 2)$, $\dddot{\mathbf{r}} = (-6, 12, 0)$, és ebből $\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}}\dddot{\mathbf{r}} = 0$, tehát $\tau = 0$. (Másképp: kiszámítható, hogy $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (-12t^2-24t-4, -6t^2-12t-2, 6t^2+12t+2) = (6t^2 + 12t + 2) \cdot (-2, -1, 1)$ mindig azonos irányú, illetve, hogy a görbe a $2x + y - z = -1$ síkban fekszik.)

4. $t = 1$-ben $\dot{\mathbf{r}} = 3 \cdot (1, 2, 2)$, $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = 18 \cdot (-2, -1, 2)$, $(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}} = 162 \cdot (-2, 2, -1)$, és $\mathbf{T}, \mathbf{B}, \mathbf{N}$ ezek normáltjai: $\mathbf{T} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$, $\mathbf{B} = \frac{1}{3}(-2, -1, 2)$, $\mathbf{N} = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$. A simulósík egyenlete: $2x + y - 2z = 10$, a torzió $-\frac{2}{27}$.

5. $a_N = \kappa \cdot |\mathbf{v}|^2 = 2 \cdot 6 = 12$, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0) \times \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -2, -5)$, így $a_N\mathbf{N} = \frac{12}{\sqrt{30}}(1, -2, -5)$.