

## Órai feladatok

1. Számítsuk ki az  $f(\mathbf{r}) = xy + xz$  függvény integrálját az  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^2 + 1)$  görbe mentén  $t_1 = 0$ -tól  $t_2 = 1$ -ig!

$$\left( \int_0^1 t(1 + 2t^2)\sqrt{1 + 8t^2} dt = 2,325 \text{ (} u = 1 + 8t^2 \text{ helyettesítéssel). } \right)$$

2. Számítsuk ki az  $f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$  függvény integrálját a  $\mathbf{r} = (2 \cos \frac{s}{2}, 1 + 2 \sin \frac{s}{2})$  ívhossz-paraméteresen megadott görbén a  $0$  és  $\pi$  paraméterértékek között!

$$\left( \int_0^\pi 5 + 4 \sin \frac{s}{2} ds = 5\pi + 8. \right)$$

3. Számítsuk ki a  $\int_{\mathcal{G}} x + y + z ds$  integrál értékét, ha  $\mathcal{G}$  az  $A(1, 2, 3)$  és  $B(0, -1, 1)$  pontokat összekötő szakasz!

$$\left( \mathbf{r}(t) = (1 - t, 2 - 3t, 3 - 2t), \text{ ahol } 0 \leq t \leq 1, \text{ és } \int_{\mathcal{G}} x + y + z ds = \int_0^1 (6 - 6t)\sqrt{14} dt = 3\sqrt{14}. \right)$$

4. Egy változó vastagságú hajlított rúd tömegközéppontját szeretnénk meghatározni. A keresztmetszetek középpontját összekötő görbe  $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (0, t^2 - 1, 2t)$ , ahol  $-1 \leq t \leq 1$ . A középpontokra koncentrált sűrűséget ( $dm/d\ell$  értelemben, ahol  $\Delta m$  a  $\Delta \ell$  hosszúságú rúddarab tömege), a  $\rho(x, y, z) = 15\sqrt{y + 2}$  függvény adja meg. Adjuk meg a tömegközéppont koordinátáit!

$$\left( M = \int_{\mathcal{G}} \rho ds = \int_{-1}^1 30(1 + t^2) dt = 80 \text{ a tömeg, } M_x = \int_{\mathcal{G}} x\rho ds = 0, M_y = \int_{\mathcal{G}} y\rho ds = -48, \right. \\ \left. M_z = \int_{\mathcal{G}} z\rho ds = 0, \text{ amiből a tömegközéppont koordinátái } \bar{x} = M_x/M = 0, \bar{y} = M_y/M = -\frac{3}{5} \right. \\ \left. \text{ és } \bar{z} = M_z/M = 0, \text{ tehát a tömegközéppont } (0, -\frac{3}{5}, 0). \right)$$

5. Határozzuk meg az  $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, x^2, y)$  vektorértékű függvény integrálját az  $\mathbf{r}(t) = (1, 3t, 4t)$  görbe mentén a  $t_1 = 0$ -tól  $t_1 = 1$ -ig!

$$\left( \int_0^1 3 + 12t dt = 9. \right)$$

6. Számítsuk ki az  $(x, y) \mapsto (-y, x)$  függvény integrálját az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletű körön pozitív irányítás mellett!

$$\left( \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi, \int_{\mathcal{G}} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \right)$$

7. Keressünk potenciálfüggvényt a megadott  $\mathbf{F}$  vektor-vektorfüggvényhez, és számítsuk ki ennek segítségével az  $\mathbf{F}$  integrált a  $\mathcal{G}$  görbén, ha

- a)  $\mathbf{F} = (2xy, x, 1)$ , és  $\mathcal{G}$  az  $A(1, 1, 1)$  pontból a  $B(1, -1, 2)$  pontba menő tetszőleges görbe;  
 b)  $\mathbf{F} = (y + z, x + z, x + y)$  és  $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (\frac{t}{t+1}, \sqrt{t^2 + 1}, 1 + t)$ , ( $0 \leq t \leq 1$ ).

$$\left( a) f(x, y, z) = xy + z \text{ potenciálfüggvény, és az integrál értéke } f(1, -1, 2) - f(1, 1, 1) = -1. \right)$$

$$\left( b) \text{ Az } f(x, y, z) = xy + xz + yz \text{ potenciálfüggvény, és az integrál értéke } [f(\mathbf{r})]_A^B = f(B) - f(A), \text{ ahol } A = \mathbf{r}(0) = (0, 1, 1), B = \mathbf{r}(1) = (1/2, \sqrt{2}, 2), \text{ és ebből az integrál } 5\sqrt{2}/2. \right)$$

8. Van-e potenciálfüggvénye az  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (xy, x + y, xz)$  függvénynek?

(Nincs. Például mert ha  $f'_x = xy$ , akkor  $f = \frac{1}{2}x^2y + g(y, z)$  valamely kétváltozós  $g(y, z)$  függvényre, és így  $f'_y = \frac{1}{2}x^2 + g'_y(y, z) = x + y$  ellentmondást ad ( $g'_y(y, z) = x - \frac{1}{2}x^2 + y$  függ  $x$ -től). Másképp:  $\text{rot } \mathbf{F} = (0, -z, 1 - x) \neq \mathbf{0}$ .)

### Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az  $\int_{\mathcal{G}} x - 1 \, ds$  integrált a  $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, 1)$  görbén  $t_0 = 0$ -tól  $t_1 = 3$ -ig!
2. Mennyi az  $\int_{\mathcal{G}} f \, ds$  integrál értéke, ha  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , és  $\mathcal{G}$  az  $x^2 + y^2 = 4$  kör  $(2, 0)$ -tól  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ -ig tartó íve?
3. Számítsuk ki az  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  függvény gradiensét!
4. Számítsuk ki az  $\mathbf{F} = \left( \frac{1}{1+y}, x^2, y^2 - z \right)$  függvény integrálját a  $\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^4)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) görbén!
5. Határozzuk meg az  $\mathbf{F} = e^{y+2z}(1, x, 2x)$  függvény potenciálfüggvényét, és számítsuk ki az integrálját az  $(1, 1, 1)$  pontot a  $(2, 3, 3)$  ponttal összekötő szakaszon!

### Megoldások

$$1. \int_0^3 (t-1)\sqrt{t+1} \, dt = \frac{46}{15}.$$

$$2. \int_0^{\pi/4} 8 \cos^2 t - 8 \sin^2 t \, dt = 4.$$

$$3. \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z).$$

$$4. \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} + 2t^3 \, dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

$$5. \text{Egy potenciálfüggvény } f(x, y, z) = xe^{y+2z}, \text{ az integrál pedig } 2e^9 - e^3.$$