Órai feladatok

1. Számítsuk ki a következő vektor-vektorfüggvények divergenciáját és rotációját!

a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(\dfrac{x}{y},\ \dfrac{y}{x},\ xz\right)$

b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{grad}\,|\mathbf{r}|$

(a) $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + x$ *és* $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left(0,\ -z,\ -\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}\right)$. *b)* $\mathbf{grad}\,|\mathbf{r}| = \mathbf{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$, *amiből* $\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, *és* $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$, *mert* $\mathbf{F}$ *egy függvény gradiense, tehát potenciálos, és potenciálos függvény rotációja* $\mathbf{0}$. *)*

2. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{div}(g \cdot \mathbf{F}) = (\mathbf{grad}\,g) \cdot \mathbf{F} + g \cdot \operatorname{div}\mathbf{F}$.

($\mathbf{F} = (P, Q, R)$*-re* $\operatorname{div}(g\mathbf{F}) = \operatorname{div}(gP,\ gQ,\ gR) = g_xP + gP_x + g_yQ + gQ_y + g_zR + gR_z$, *és a jobb oldal is ezzel egyenlő.)*

3. Lássuk be, hogy az $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2x + 6xz,\ -2y,\ 3x^2 - 3z^2)$ vektormező forrásmentes és örvénymentes is!

($\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ *és* $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$*)*

4. Paraméterezzük azt a kúppalástot, amelynek alapja az $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ egyenletekkel megadott kör, csúcsa pedig $A(1, 2, 3)$.

(A kúppalástot lefedhetjük a csúcsot a kör pontjaival összekötő szakaszokkal. A kör egy tetszőleges pontja $P(\cos u, \sin u, 0)$, *és az* AP *szakaszt* v*-vel paraméterezve a kúppalást tetszőleges pontjának helyvektorára az*
$\mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{AP} = (1 - v + v\cos u,\ 2 - 2v + v\sin u,\ 3 - 3v)$ *kifejezést kapjuk, ahol* $0 \le u \le 2\pi$ *és* $0 \le v \le 1$. *)*

5. Írjuk fel a következő felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

a) $\mathbf{r} = (uv,\ \frac{u}{v},\ \sqrt{u})$ az $(u, v) = (4, 1)$ paraméterű pontban;

b) $x^3 + xy^2 + 3yz^3 = 5$ az $(1, 1, 1)$ pontban.

(a) $\mathbf{r}_u = (v, \frac{1}{v}, \frac{1}{2\sqrt{u}})$, $\mathbf{r}_v = (u,\ -\frac{u}{v^2},\ 0)$, *az adott pontban* $\mathbf{r}_u = (1, 1, \frac{1}{4})$ *és* $\mathbf{r}_v = (4, -4, 0)$. *Ebből a normálvektor* $(1, 1, -8)$, *a megadott pont* $\mathbf{r}(4, 1) = (4, 4, 2)$, *és az érintősík* $x + y - 8z = -8$. *b) A felület a* $g(x, y, z) = x^3 + xy^2 + 3yz^3$ *függvény nívóhalmaza, így normálvektora* $\mathbf{grad}\,g = (3x^2 + y^2,\ 2xy + 3z^3,\ 9yz^2)$, *ami az* $(1, 1, 1)$ *pontban* $(4, 5, 9)$, *és a sík egyenlete* $4x + 5y + 9z = 18$. *)*

6. Számítsuk ki a következő felületdarabok felszínét!

a) $\mathbf{r}(u, v) = (u^2, 2u\cos v, 2u\sin v)$, $\quad 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$;

b) Az $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ gömbből a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp által kimetszett rész.

(a) $\int_0^{\pi/2}\int_0^1 |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv \int_0^{\pi/2}\int_0^1 4u\sqrt{1 + u^2}\,du\,dv = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}\pi$. *b) A kúp és a gömb metszete az* $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ *kör, tehát a felületdarab vetülete az* xy*-síkra az* $x^2 + y^2 \le 1$ *kör. A* $\iint \frac{|\nabla g|}{|(\nabla g)\mathbf{p}|}\,dA$ *képletet használva, ahol* $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, *és* $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ *a vetület síkjának egységnyi normálvektora:* $|\nabla g| = |(2x, 2y, 2z)| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2}$ *a*

gömbfelületen, $|(\nabla g)\mathbf{p}| = |2z| = 2\sqrt{2-x^2-y^2}$*, és a felszín* $\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-r^2}} r\,d\vartheta\,dr = (4-2\sqrt{2})\pi$*. Másképp: a gömbsapka paraméterezése* $\mathbf{r}(\varphi,\vartheta) = (\sqrt{2}\sin\varphi\cos\vartheta,\ \sqrt{2}\sin\varphi\sin\vartheta,\ \sqrt{2}\cos\varphi)$*, ahol* $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\vartheta| = 2\sin\varphi$*, és a felszín* $\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi} 2\sin\varphi = (4-2\sqrt{2})\pi$*.)*

Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a divergenciát és a rotációt!
a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x^2+y^3,\ 12xy-3x,\ xyz^2)$
b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (1,1,1)$

2. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\mathbf{rot}\,\mathbf{F})\mathbf{G} - \mathbf{F}(\mathbf{rot}\,G)$.

3. Paraméterezzük a $z = y^2$ görbe y körüli forgatásával kapott felületet!

4. Határozzuk meg az $\mathbf{r}(u,v) = (u, \cos u\sin v, \cos u\cos v)$ felület normálvektorát az $u_0 = \frac{\pi}{4}$, $v_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterértékekhez tartozó pontjában!

5. Adjuk meg az $xy^2 + z^3 = 12$ felület érintősíkjának egyenletét a $P_0(1,2,2)$ pontban!

6. Számítsuk ki az $\mathbf{r}(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, u+v)$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 1$ felületdarab felszínét!

Megoldások

1. a) $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2x + 12y + 2xyz$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (xz^2,\ -yz^2,\ 12y-3-3y^2)$ b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = (-2,-2,-2)$.

2. Legyen $\mathbf{F} = (F_1,F_2,F_3)$, és $\mathbf{G} = (G_1,G_2,G_3)$ $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \operatorname{div}(F_2G_3 - F_3G_2,\ F_3G_1 - F_1G_3,\ F_1G_2 - F_2G_1) =$

$$\Big((F_2)_xG_3 + F_2(G_3)_x - (F_3)_xG_2 - F_3(G_2)_x\Big) +$$
$$\Big((F_3)_yG_1 + F_3(G_1)_y - (F_1)_yG_3 - F_1(G_3)_y\Big) +$$
$$\Big((F_1)_zG_2 + F_1(G_2)_z - (F_2)_zG_1 - F_2(G_1)_z\Big) =$$
$$\Big((F_3)_y - (F_2)_z\Big)G_1 + \Big((F_1)_z - (F_3)_x\Big)G_2 + \Big((F_2)_x - (F_1)_y\Big)G_3 +$$
$$F_1\Big((G_2)_z - (G_3)_y\Big) + F_2\Big((G_3)_x - (G_1)_z\Big) + F_3\Big((G_1)_y - (G_2)_x\Big) =$$
$$(\mathbf{rot}\,\mathbf{F})\mathbf{G} + \mathbf{F}(\mathbf{rot}\,\mathbf{G}).$$

3. $\mathbf{r}(y,\varphi) = (y^2\sin\varphi, y, y^2\cos\varphi)$, $y\in\mathbb{R}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

4. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$

5. $\nabla(xy^2 + z^3 - 12) = (y^2, 2xy, 3z^2)$, így az érintősík normálvektora $(4,4,12)$, vagy az ezzel párhuzamos $(1,1,3)$, és a sík egyenlete $x + y + 3z = 9$.

6. $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-v\sin u, v\cos u, -v)$, $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = v\sqrt{2}$, a felszín $\pi/\sqrt{2}$.