

## Órai feladatok

1. Számítsuk ki a  $z - x$  skalárértékű függvény felületi integrálját az  $\mathcal{F} : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq 1$  kúpfelületen.

$$(\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, u), \text{ ahol } 0 \leq u \leq 1 \text{ és } 0 \leq v \leq 2\pi. \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-u \cos v, -u \sin v, u), \\ |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{2}|u| = \sqrt{2}u, \text{ ha } 0 \leq u, \text{ és } z - x = u - u \cos v. \text{ Az integrál } \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}u^2 - \\ \sqrt{2}u^2 \cos v \, dv \, du = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}. )$$

2. Számítsuk ki az  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, -y, z)$  vektorértékű függvény felületmenti integrálját az  $\mathcal{F} : \mathbf{r}(u, v) = (u+2v, v, u-v)$ ,  $0 \leq u \leq 3$ ,  $0 \leq v \leq 1$  felületen felfelé mutató normálvektorokkal.

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-1, 3, 1) \text{ fölfelé mutató, } \mathbf{F}(u, v) = (u + 2v, -v, u - v), \text{ és az integrál } \\ \int_0^1 \int_0^3 -6v \, du \, dv = -9. )$$

3. Számítsuk ki az  $\int_{\mathcal{F}} (xz, xy, yz) \mathbf{n} \, d\sigma$  integrált, ahol az  $\mathcal{F} : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  és a  $z = 0$  sík által határolt térbeli tartomány teljes felülete, befelé mutató normálvektorokkal.

$$(Gauss-Osztrogradszkij-tétellel: \operatorname{div} \mathbf{F} = x + y + z, \text{ és az } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \\ 0 \text{ félgömbtartományon kell integrálni. Gömbi koordinátákkal: } \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\rho \sin \varphi \cos \vartheta + \\ \rho \sin \varphi \sin \vartheta + \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi \, d\vartheta \, d\varphi \, d\rho = \frac{\pi}{4}. \text{ Viszont a befelé mutató normálvektorok miatt az eredeti integrál ennek a negatívja: } -\frac{\pi}{4}. )$$

4. A Stokes-tétel felhasználásával számítsuk ki a  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y^2, z^2, x^2)$  függvény integrálját az  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  és  $C(0, 0, 1)$  pontokon, majd újra az  $A$  ponton keresztülhaladó zárt törtvonal mentén.

$$(\operatorname{rot} \mathbf{F} = (-2z, -2x, -2y), \text{ és ezt az } x + y + z = 1 \text{ síkon levő (tehát } (1, 1, 1) \text{ normálvektorú) felületdarabon kell integrálni. A felület vetülete az } xy\text{-síkra a } (0, 0), (1, 0), (0, 1) \text{ csúcsok által határolt } T \text{ háromszögtartomány. Így az integrál} \\ \int_T (-2(1 - x - y), -2x, -2y) \cdot (1, 1, 1) / |(1, 1, 1)(0, 0, 1)| \, dy \, dx = \int_T -2 \, dy \, dx = -2 \cdot \frac{1}{2} = \\ -1 \text{ (mivel konstans függvényt kellett integrálni, elég volt a területtel megszorozni a függvényértéket). )}$$

5. A Green-tétel segítségével számítsuk ki az  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (2x^2 + 2y^2, (x+y)^2)$  függvény integrálját az  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 2)$  és  $C(1, 3)$  csúcsokon keresztülmenő zárt háromszögvonal mentén.

$$(A \frac{\partial}{\partial x} (x+y)^2 - \frac{\partial}{\partial y} (2x^2 + 2y^2) = 2x - 2y \text{ függvényt kell integrálni a háromszögtartományon:} \\ \int_1^2 \int_x^{4-x} 2x - 2y \, dy \, dx = -\frac{4}{3} )$$

## Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a  $z^2$  függvény felületi integrálját az  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$  félgömbfelületen.
2. Számítsuk ki a  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$  függvény integrálját, a  $\mathcal{F} : \mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 2)$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  felületen.

3. Számítsuk ki az  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (xe^z, y^2, -2yz)$  függvény felületmenti integrálját a  $z = x^2 + y^2$  paraboloid és a  $z = 4$  sík által határolt korlátos tartomány teljes felületén, kifelé mutató normálvektorokkal.
4. Számítsuk ki Stokes-tétellel és anélkül a  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (x, x + y, x + y + z)$  függvény integrálját az  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 2$  egyenletekkel meghatározott körvonalon, pozitív irányban.

### Megoldások

1.  $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ ,  $|\nabla g| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4$  a felületen, míg az  $xy$ -sík  $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$  normálvektorával  $\nabla g \cdot \mathbf{p} = 2z = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$  a felületen, végül az integrálandó függvény  $z^2 = 4 - x^2 - y^2$ . Ebből az integrál  $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} (4 - x^2 - y^2) \frac{4}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} 2\sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 2\sqrt{4 - r^2} r dr d\vartheta = \frac{32}{3}\pi$ .

2.  $\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$ ,  $\mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0)$   
 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (0, 0, u)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}(u, v)) = (u \cos v, u \sin v, 2)$ ,  
 $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = 2u$   
 Ebből az integrál  $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 2u du dv = \frac{\pi}{2}$ ,

3. A Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint az integrál megegyezik  $\text{div } \mathbf{F} = e^z + 2y - 2y = e^z$  integráljával a paraboloid és a sík által határolt térbeli tartományon. A tartomány vetülete az  $xy$ -síkra a metszetkör vetülete, azaz az origó körüli 2 sugarú kör. Hengerkoordinátákkal felírva az integrált:  $\int_0^2 \int_{r^2}^4 \int_0^{2\pi} e^z r d\vartheta dz dr = \int_0^2 \int_{r^2}^4 2\pi r e^z dz dr = \int_0^2 [2\pi r e^z]_{r^2}^4 dr = \int_0^2 2\pi r e^4 - 2\pi r e^{r^2} dr = \left[ \pi r^2 e^4 - \pi e^{r^2} \right]_0^2 = 3\pi e^4 + \pi$ .

4.  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2)$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0)$ ,  
 $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (2 \cos t, 2 \cos t + 2 \sin t, 2 + 2 \cos t + 2 \sin t)$ ,  
 $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) = 4 \cos^2 t$ ,  
 $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} 2 + 2 \cos 2t dt = [2t + \sin 2t]_0^{2\pi} = 4\pi$ .

vagy Stokes-tétellel:

$\text{rot}(\mathbf{F}) = (1, -1, 1)$ ,

és a sík  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 2)$  paraméterezéséhez a normálvektor  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (0, 0, 1)$ , a paramétertartomány pedig  $x^2 + y^2 \leq 4$

$\iint_{\mathcal{F}} (1, -1, 1) \cdot (0, 0, 1) d\sigma = \iint_{\mathcal{F}} 1 d\sigma$ , ez pedig az  $x^2 + y^2 \leq 4$  kör területe, azaz  $4\pi$ .